1

解答解説のページへ

a を $-2 \leqq a \leqq 3$ を満たす実数とする。次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<-2 \text{ のとき}) \\ (x-a)(x+2) & (-2 \leqq x \leqq a \text{ のとき}) \\ 2(x-a)(x-3) & (a \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x>3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく。

(1)　$S(a)$ を求めよ。

(2)　$S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。また，$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

n を正の整数, a, b を 0 以上の整数とする。

(1)　$n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3)　等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$，直線 $L : -4x + 3y + a = 0$，直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

6 枚の硬貨を同時に投げて，表が出た硬貨が s 枚，裏が出た硬貨が t 枚であったとき，ベクトル $\vec{p}=(x,\ y)$ を $\vec{p}=s(2,\ -1)+t(-1,\ 2)$ で定める。

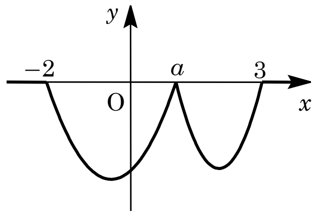
(1) $x+y$ の値を求めよ。

(2) $\vec{p}=(0,\ 6)$ となる確率を求めよ。

(3) $\vec{p}$ と $\vec{q}=(3,\ 1)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　条件より，$-2 \leqq a \leqq 3$ のとき，

$$f(x)=0 \quad (x<-2,\ 3<x)$$
$$f(x)=(x-a)(x+2) \quad (-2 \leqq x \leqq a)$$
$$f(x)=2(x-a)(x-3) \quad (a \leqq x \leqq 3)$$

すると，曲線 $y=f(x)$ は右図の太線部となり，x 軸とで囲まれる図形の面積 $S(a)$ は,

$$S(a)=\int_{-2}^{a}-(x-a)(x+2)\,dx+\int_{a}^{3}-2(x-a)(x-3)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(a+2)^3-2\left(-\frac{1}{6}\right)(3-a)^3$$
$$=\frac{1}{6}(a^3+6a^2+12a+8)+\frac{1}{3}(27-27a+9a^2-a^3)$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+4a^2-7a+\frac{31}{3}$$

(2)　(1)より，$S'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2+8a-7$

$-2 \leqq a \leqq 3$ における $S'(a)=0$ の解は $a=8-5\sqrt{2}$ なので，$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\dfrac{125}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\dfrac{125}{6}$

すると，$a=-2$ のとき $S(a)$ は最大，$a=8-5\sqrt{2}$ のとき $S(a)$ は最小となる。

［解 説］

微積分の基本問題です。注意すべきは計算ミスだけです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　n が $n \geqq 3$ の整数のとき，不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ の成立を数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 3$ のとき　$3^3 - (2^3 + 3^2 + 8) = 27 - 25 = 2 > 0$ となり成立している。

(ii)　$n = k$ のとき　$2^k + k^2 + 8 < 3^k$ の成立を仮定すると，

$$3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} > 3(2^k + k^2 + 8) - (2\cdot 2^k + k^2 + 2k + 9)$$
$$= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 = 2^k + 2k(k-1) + 15$$

$k \geqq 3$ より，$2^k + 2k(k-1) + 15 > 0$ となり，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n \geqq 3$ のとき，不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ は成立する。

(2)　不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ ……①を満たす正の整数 n について，(1)の結果より，$n < 3$ が必要である。以下，$n = 1,\ 2$ のとき成立するかどうかを調べる。

(i)　$n = 1$ のとき　$2^1 + 1^2 + 8 = 11$，$3^1 = 3$ より，①は成立している。

(ii)　$n = 2$ のとき　$2^2 + 2^2 + 8 = 16$，$3^2 = 9$ より，①は成立している。

以上より，①を満たす正の整数 n は，$n = 1,\ 2$ である。

(3)　まず，n は正の整数，a, b は 0 以上の整数から，$3^n + an + b \geqq 3^n$ となる。

これより，等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ ……②を満たす $a,\ b,\ n$ の組について，不等式①が成立することが必要であり，すなわち $n = 1,\ 2$ となる。

(i)　$n = 1$ のとき　②から，$11 = 3 + a + b$ より $a + b = 8$ となり，

$(a,\ b) = (a,\ 8 - b)$　$(a = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

(ii)　$n = 2$ のとき　②から，$16 = 9 + 2a + b$ より $2a + b = 7$ となり，

$(a,\ b) = (a,\ 7 - 2a)$　$(a = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(i)(ii)より，②を満たす $(a,\ b,\ n)$ の組は，

$(0,\ 8,\ 1)$，$(1,\ 7,\ 1)$，$(2,\ 6,\ 1)$，$(3,\ 5,\ 1)$，$(4,\ 4,\ 1)$
$(5,\ 3,\ 1)$，$(6,\ 2,\ 1)$，$(7,\ 1,\ 1)$，$(8,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 7,\ 2)$
$(1,\ 5,\ 2)$，$(2,\ 3,\ 2)$，$(3,\ 1,\ 2)$

［解　説］

非常に細かい誘導のついた不定方程式の問題です。(1)は数学的帰納法で証明していますが，二項定理の利用も考えられます。なお，設問(2)は，ちょっと驚きです。

3

問題のページへ

(1)　円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0\ (a\neq 0)$ ……①に対し，$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$ と変形すると，円 C は，中心 $(a,\ 2)$ で半径 $|a|$ である。

また，直線 $L: -4x+3y+a=0$ ……②，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ ……③に対し，L と M の交点は，②③を連立して，$25y-25a=0$ から，

$$y=a,\ x=\frac{1}{4}(3a+a)=a$$

すると，交点 $(a,\ a)$ が C 上にある条件は，$(a-a)^2+(a-2)^2=a^2$ より，

$$-4a+4=0,\ a=1$$

(2)　C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，$\dfrac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$ から，

$$|-3a+6|<5|a|,\ 9(a-2)^2<25a^2,\ 4a^2+9a-9>0$$

すると，$(4a-3)(a+3)>0$ より，$a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$ である。

(3)　まず，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}$ の要素の個数は，(2)から，

$a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$ のとき 2 個，$a=-3,\ \dfrac{3}{4}$ のとき 1 個，$-3<a<\dfrac{3}{4}$ のとき 0 個

また，C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，$\dfrac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$ から，

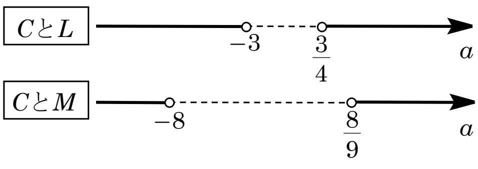
$$|-4a+8|<5|a|,\ 16(a-2)^2<25a^2,\ 9a^2+64a-64>0$$

すると，$(9a-8)(a+8)>0$ より，$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$ である。

これより，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数は，

$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$ のとき 2 個，$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき 1 個，$-8<a<\dfrac{8}{9}$ のとき 0 個

以上より，C と L の共有点の個数，C と M の共有点の個数について，数直線を用いてまとめると右図のようになる。ただし，実線部の範囲は 2 個，白丸の値は 1 個，破線部の範囲は 0 個を意味する。



右上図より，C と L の共有点と C と M の共有点が，合わせて 3 個になるのは，$a=-8$ または $a=\dfrac{8}{9}$ のときである。

また，$a=1$ のときは，C と L の共有点と C と M の共有点は 2 個ずつであるが，(1)から，このうちの 1 つは重なるため，この場合も合わせて 3 個になる。

よって，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となる a の値は，$a=-8,\ \dfrac{8}{9},\ 1$ である。

［解 説］

円と直線についての問題です。(1)の誘導のおかげで，(3)の設問についてのケアレスミスは減少すると思われます。

4

問題のページへ

(1)　6 枚の硬貨を同時に投げて，表が出た硬貨が s 枚，裏が出た硬貨が t 枚であったとき，$s+t=6$ となり，このとき $\vec{p}=(x,\ y)$ として，

$$\vec{p}=s(2,\ -1)+t(-1,\ 2)=s(2,\ -1)+(6-s)(-1,\ 2)=(3s-6,\ -3s+12)$$

このとき，$x+y=(3s-6)+(-3s+12)=6$ となる。

(2)　$\vec{p}=(0,\ 6)$ となるのは，$3s-6=0$ かつ $-3s+12=6$ より，$s=2$ である。

このときの確率は，${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$ である。

(3)　$\vec{p}$ と $\vec{q}=(3,\ 1)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ 以下となるのは，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\geqq\cos\frac{\pi}{6}$ ………①

ここで，$\vec{p}\cdot\vec{q}=3(3s-6)+(-3s+12)=6(s-1)$ となり，

$$|\vec{p}||\vec{q}|=\sqrt{(3s-6)^2+(-3s+12)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{18(s^2-6s+10)}\cdot\sqrt{10}$$
$$=6\sqrt{5(s^2-6s+10)}$$

①に代入して，$\frac{6(s-1)}{6\sqrt{5(s^2-6s+10)}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ から，$2(s-1)\geqq\sqrt{15(s^2-6s+10)}$

$s>1$ のもとで両辺を 2 乗すると，$4(s^2-2s+1)\geqq15(s^2-6s+10)$ となり，

$$11s^2-82s+146\leqq0 \text{ ………②}$$

ここで，$f(s)=11s^2-82s+146=s(11s-82)+146$ とおくと，

$$f(2)=2\cdot(-60)+146=26,\ f(3)=3\cdot(-49)+146=-1$$
$$f(4)=4\cdot(-38)+146=-6,\ f(5)=5\cdot(-27)+146=11$$

すると，②を満たす s は $s=3,\ 4$ であり，これから①を満たす確率は，

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{20}{64}+\frac{15}{64}=\frac{35}{64}$$

［解　説］

平易な内容の確率とベクトルの融合問題です。(3)は数値計算が面倒ですが，上の解答例は正面から攻める方法でつくりました。なお，当たりをつけて十分性を確認する方法も考えられます。