1

問題のページへ

(1)　不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す領域に，点 $(p,\ q)$ が存在しているので，

$$q \leqq 2ap - a^2 + 2a + 2,\ \ a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

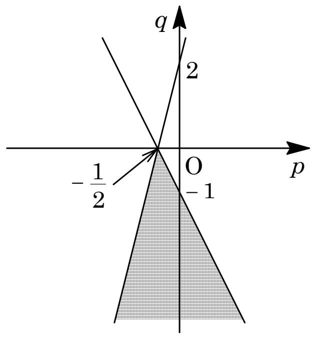
ここで，$f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とおくと，$(*)$は $f(a) \leqq 0$ となる。

さて，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leqq 0$$

$$f(2) = -4p + q - 2 \leqq 0$$

よって，点 $(p,\ q)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　(1)と同様に，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

(i)　$p + 1 \leqq -1\ (p \leqq -2)$ のとき

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leqq 0$$

(ii)　$-1 \leqq p + 1 \leqq 2\ (-2 \leqq p \leqq 1)$ のとき

$f(a) = 0$ が実数解をもつことより，

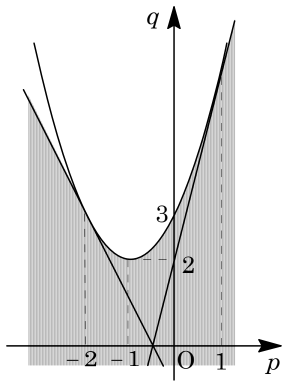
$$D/4 = (p+1)^2 - q + 2 \geqq 0,\ \ q \leqq (p+1)^2 + 2$$

(iii)　$p + 1 \geqq 2\ (p \geqq 1)$ のとき

$$f(2) = -4p + q - 2 \leqq 0$$

(i)～(ii)より，点 $(p,\ q)$ の範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



[解 説]

2 次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，時間はかかります。

2

問題のページへ

(1) 円 C の中心 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は，点 $(a,\ -a)$ を通り，接線 $y=-x$ に垂直な直線上にあり，

$$Y+a=X-a\,,\ \ X=Y+2a\cdots\cdots\cdots①$$

また，点Pと点 $(a,\ -a)$ の距離と，点Pと点 $(0,\ 1)$ の距離は等しいので，

$$(X-a)^2+(Y+a)^2=X^2+(Y-1)^2\,,\ \ -2aX+2(a+1)Y+2a^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-2a(Y+2a)+2(a+1)Y+2a^2=1$，$2Y=2a^2+1$ となり，

$$Y=\frac{2a^2+1}{2},\ \ X=\frac{2a^2+1}{2}+2a=\frac{2a^2+4a+1}{2}$$

(2) (1)より，点Pの軌跡は，$x=\dfrac{2a^2+4a+1}{2}$，$y=\dfrac{2a^2+1}{2}$ から，

$$\frac{dx}{da}=2a+2,\ \ \frac{dy}{da}=2a$$

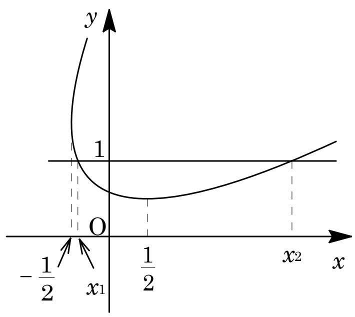
すると, x, y の増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$	$-$	0	$+$		$+$
x	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$
$\dfrac{dy}{da}$	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$

また，点Pの軌跡と直線 $y=1$ との交点は,

$$\frac{2a^2+1}{2}=1,\ \ a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより，点 P の軌跡と直線 $y=1$ とで囲まれる図形の面積 S は,



$$\begin{aligned}
S&=\int_{x_1}^{x_2}(1-y)\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-\frac{2a^2+1}{2}\right)(2a+2)\,da\\
&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^3-2a^2+a+1)\,da\\
&=2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^2+1)\,da\\
&=2\Big[-\frac{2}{3}a^3+a\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

[解 説]

(2)では，最初，パラメータを消去しようとしましたが，交点の座標の値をみて，考え直しました。その結果が，上の解答例です。

3

問題のページへ

(1)　A, B, C が玉を取り出す確率は，それぞれ$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$である。

最初，赤玉 3 個，白玉 7 個入った箱から，A が赤玉 2 個を取り出す確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{540}$$

(2)　まず, B が赤玉を手に入れない場合の確率を求める。

(i)　1 回目に B が白玉，2 回目も B が白玉を取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{135}$$

(ii)　1 回目に B が白玉，2 回目は A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{7}{45}$$

(iii)　1 回目は A または C，2 回目に B が白玉を取り出すとき

1 回目に赤玉を取り出すときと白玉を取り出すときに分けると，

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{45}$$

(iv)　1 回目に A または C，2 回目も A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{2}{3}\times1\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{4}{9}$$

(i)～(iv)より, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は，

$$1-\left(\frac{7}{135}+\frac{7}{45}+\frac{7}{45}+\frac{4}{9}\right)=\frac{26}{135}$$

(3)　3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率は，

(i)　1 回目に赤玉, 2 回目も赤玉のとき　$\left(1\times\frac{3}{10}\right)\times\left(1\times\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{240}$

(ii)　1 回目に赤玉, 2 回目に白玉のとき　$\left(1\times\frac{3}{10}\right)\times\left(1\times\frac{7}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}\right)=\frac{7}{240}$

(iii)　1 回目に白玉, 2 回目に赤玉のとき　$\left(1\times\frac{7}{10}\right)\times\left(1\times\frac{3}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}\right)=\frac{7}{240}$

(iv)　1 回目に白玉, 2 回目も白玉のとき　$\left(1\times\frac{7}{10}\right)\times\left(1\times\frac{6}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{21}{240}$

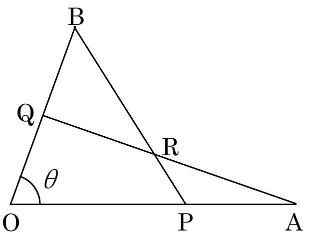
(i)～(iv)より，$\frac{1}{240}+\frac{7}{240}+\frac{7}{240}+\frac{21}{240}=\frac{3}{20}$

[解 説]

注意力がすべてといっても過言ではない問題です。(2)は，余事象を考えない方がよかったかもしれません。さらに，(iii)の場合も(ii)にまとめた方がよかったかもしれません。なお, (2)までは文理共通です。

4

問題のページへ



$\triangle$OPB と直線 AQ に対し，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であり，点 Q は線分 OB の中点から，

$$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{1}{1}=1,\ \ \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}=1-t$$

よって，$\mathrm{PR}:\mathrm{RB}=1-t:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2-t}=\frac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}{2-t}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならない条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq 0$ より，

$$\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})\neq 0$$

条件より，$|\vec{a}|^2=9$，$|\vec{b}|^2=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2\cos\theta=6\cos\theta$ なので，

$$-9t+6t\cos\theta-6(1-t)\cos\theta+4(1-t)\neq 0$$

$$6(2t-1)\cos\theta-13t+4\neq 0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x=\cos\theta$ とおくと，$0<\theta<\pi$ から $-1<x<1$ となり，①より，

$$6(2t-1)x-13t+4\neq 0\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$0<t<1$ のもとで，$-1<x<1$ を満たすどんな x に対しても，②を満たす条件は，$f(x)=6(2t-1)x-13t+4$ とおくと，

$$f(-1)=-25t+10,\ \ f(1)=-t-2<0$$

よって，求める条件は，$f(1)<0$ に注意すると，$f(-1)\leqq 0$ から $\dfrac{2}{5}\leqq t<1$ である。

[解 説]

ベクトルというよりは，数式処理の問題です。置き換えると，高々1 次の $f(x)$ が現れ，そのグラフのイメージをもとに解いています。

5

問題のページへ

(1)　$z+1-\dfrac{a}{z}=0$ より，$z^2+z-a=0\ (z\neq 0)$ となり，

(i)　$a\neq 0$ のとき　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(ii)　$a=0$ のとき　$z=-1$

(2)　$\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$ より，$a=z\overline{z}+z$ となり，$z=x+yi\ (x^2+y^2\neq 0)$ とおくと，

$$a=(x+yi)(x-yi)+x+yi=x^2+y^2+x+yi$$

$a,\ x,\ y$ は実数より，$y=0$ となり，

$$a=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\quad (x\neq 0)$$

よって，$a\geqq -\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$ より，$a=(z\overline{z})^2+z\overline{z}$ となり，(2)と同様にすると，

$$a=\left(z\overline{z}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\quad (z\overline{z}=x^2+y^2>0)$$

よって，$a>0$ である。

[解 説]

一見すると，難問風ですが，普通に計算していけばよい問題でした。

6

問題のページへ

$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ に対し，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とすると，

$$A^2-2A+E=O\text{，}(A-E)^2=O$$

ここで，$B=A-E$ とおくと $B^2=O$ から，二項定理を利用して，

$$A^n=(B+E)^n=nB+E=n\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2n+1 & -n\\ 4n & -2n+1\end{pmatrix}$$

さて，条件より，$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ とおくと，$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ となる。

ここで，$\mathrm{P}_0(1,\ 1)$ としてもよいので，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2n+1 & -n\\ 4n & -2n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\ 2n+1\end{pmatrix}$$

さらに，点 $\mathrm{Q}(10,\ 10)$ に対して，

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}^2=(x_n-10)^2+(y_n-10)^2=(n-9)^2+(2n-9)^2$$

$$=5n^2-54n+162=5\left(n-\frac{27}{5}\right)^2-\frac{27^2}{5}+162$$

n は整数なので，$\dfrac{27}{5}=5.4$ から $n=5$ のとき $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}^2$ は最小値をとる。すなわち，P_n が点 Q に最も近くなるのは，$n=5$ のときである。

[解 説]

固有方程式が重解をもつ行列が与えられています。この行列の n 乗を求めるのに，ノーヒントですが，二項定理を利用した解法を採用しています。普通に，予測→数学的帰納法でも構いません。