

1

問題のページへ

$f(X) = X^3 + 3X^2 - 9X$ に対して,

$$f'(X) = 3X^2 + 6X - 9$$

$$= 3(X+3)(X-1)$$

$$f''(X) = 6X + 6 = 6(X+1)$$

これより、 $Y = f(X)$ のグラフの概

X	...	-3	...	-1	...	1	...
$f'(X)$	+	0	-		-	0	+
$f''(X)$	-		-	0	+		+
$f(X)$	↶	27	↷	11	↶	-5	↷

形は右図のようになる。

さて、 $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対して,

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y} \dots\dots\dots$$

ここで、 $y < x < a$ のとき、 XY 平面上で 2 点 $(y, f(y))$, $(a, f(a))$ を結ぶ線分と直線 $X=x$ との交点を $(x, g(x))$ とおくと,

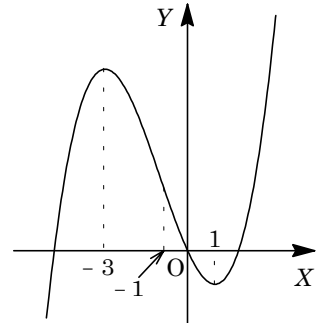
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{(a-x) + (x-y)} \\ &= \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

より、与えられた条件は、 $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対して,

$$f(x) > g(x)$$

すなわち、 $Y = f(X)$ のグラフが、 $X < a$ で上に凸であることを意味する。

よって、求める a の範囲は、 $a < -1$ である。



[解 説]

文系の類題は、関数が複雑でないので、計算のみで処理しました。ところが、理系の本問は、同じ方針だと計算量が多くなりすぎるので、不等式の意味を考え、直感的に解いています。

2

問題のページへ

(1) $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ に対して, $y' = 3x^2 - a^2$ となり, 接点を $(t, t^3 - a^2t + a^3)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(x - t), \quad y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 + a^3$$

点 $P(b, 0)$ を通ることより,

$$(3t^2 - a^2)b - 2t^3 + a^3 = 0, \quad 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3 = 0 \dots\dots\dots$$

3 次曲線に異なる 2 点で接する接線は存在しないので, 接線が 3 本存在する条件は, a が異なる実数解を 3 個もつことに等しい。

そこで, $f(t) = 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3$ とおくと,

$$f'(t) = 6t^2 - 6bt = 6t(t - b)$$

$b > 0$ より, $f(t)$ の増減は右表のようになり, 求

める条件は,

$$f(0) = a^2b - a^3 = a^2(b - a) > 0 \dots\dots\dots$$

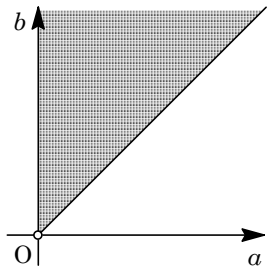
$$f(b) = -b^3 + a^2b - a^3 < 0 \dots\dots\dots$$

$a > 0$ なので, a から, $b > a > 0 \dots\dots\dots$

は, $-b(b^2 - a^2) - a^3 < 0$ となり, a のもとで成立する。

よって, 点 P から曲線 C に接線が 3 本引ける a, b の条件は $b > a > 0$ であり, 点 (a, b) の存在する領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。

t	...	0	...	b	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗		↘		↗



(2) 接線がちょうど 2 本引ける条件は, (1)より, $f(0) = 0$ または $f(b) = 0$ である。

(i) $f(0) = 0$ のとき $b = a$

このとき, $f(t) = 2t^3 - 3at^2 = 0$ の解は, $t = 0, \frac{3}{2}a$ である。

そこで, 接点を $A(0, a^3), B(\frac{3}{2}a, \frac{23}{8}a^3)$ とおくと, $P(a, 0)$ から,

$$\overrightarrow{PA} = (-a, a^3), \quad \overrightarrow{PB} = (\frac{1}{2}a, \frac{23}{8}a^3)$$

$\angle APB < 90^\circ$ より, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$ となり, $-\frac{1}{2}a^2 + \frac{23}{8}a^6 > 0$ から, $a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$

(ii) $f(b) = 0$ のとき $b^3 - a^2b + a^3 = 0$

$b > a > 0$ のとき, $b(b^2 - a^2) + a^3 > 0$ となり, 成立しない。

$a > b > 0$ のとき, $b^3 + a^2(a - b) > 0$ となり, 成立しない。

(i)(ii)より, 求める条件は, $a = b > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$ である。

[解 説]

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題です。

3

問題のページへ

(1) 各位の数字が 1, 2, 3, 4 の 5 桁の整数 X に, 数字 1 が 2 回現れる確率は,

$${}^5C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{512}$$

(2) X に, 数字 1 が 1 回, 2 が 1 回, 3 または 4 が 3 回現れる確率は,

$${}^5C_1 {}^4C_1 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{5}{32}$$

(3) 4 種類の数字を a, b, c, d とすると, X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上あるのは, 次の場合である。

(i) aabcd のとき

a の選び方が 4C_1 通りあることより, その確率は,

$${}^4C_1 \times \frac{5!}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{64}$$

(ii) aabbbb のとき

a, b の選び方が 4P_2 通りあることより, その確率は,

$${}^4P_2 \times \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{128}$$

(iii) aabbc のとき

a, b の選び方が 4C_2 通り, c の選び方が 2 通りあることより, その確率は,

$${}^4C_2 \times 2 \times \frac{5!}{2!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{45}{128}$$

(i)(ii)(iii)より, 求める確率は, $\frac{15}{64} + \frac{15}{128} + \frac{45}{128} = \frac{45}{64}$ である。

[解説]

反復試行の確率に関する基本問題です。

4

問題のページへ

$$(1) \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \text{ より, } \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} = \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{2} \text{ となり,}$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} = \vec{0}$$

これより, $\overrightarrow{NM} = \vec{0}$ となり, 題意を満たさない。

よって, 点 P は存在しない。

$$(2) |\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}| \text{ から, (1)と同様にすると,}$$

$$|\overrightarrow{QM}| = |\overrightarrow{QN}|$$

よって, 点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

$$(3) \text{ まず, } |\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MR}|^2 + |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MR}|^2 \\ = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MR} - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MR} \\ = 2|\overrightarrow{MA}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MR} \\ = 2|\overrightarrow{MA}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2$$

$$\text{同様にして, } |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2 = 2|\overrightarrow{NC}|^2 + 2|\overrightarrow{NR}|^2 = 2|\overrightarrow{NC}|^2 + 2|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MN}|^2 \\ = 2|\overrightarrow{NC}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 - 4\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} + 2|\overrightarrow{MN}|^2$$

すると, $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$ より,

$$2|\overrightarrow{MA}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 = 2|\overrightarrow{NC}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 - 4\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} + 2|\overrightarrow{MN}|^2$$

よって, $2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} = |\overrightarrow{NC}|^2 + |\overrightarrow{MN}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 \dots\dots (*)$ となり, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

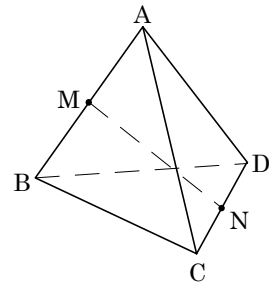
$$(4) \text{ 点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は, } |\overrightarrow{RM}| = |\overrightarrow{RN}| \text{ であり,}$$

$$|\overrightarrow{RM}|^2 = |\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MR}|^2, |\overrightarrow{RM}|^2 = |\overrightarrow{MN}|^2 - 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} + |\overrightarrow{MR}|^2$$

$$(*) \text{ を代入して, } |\overrightarrow{RM}|^2 = |\overrightarrow{MN}|^2 - |\overrightarrow{NC}|^2 - |\overrightarrow{MN}|^2 + |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MR}|^2$$

$$|\overrightarrow{MA}|^2 - |\overrightarrow{NC}|^2 = 0, |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{NC}|$$

よって, $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ から, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ である。



[解 説]

(4)まで, うまく誘導のついている問題です。ただ, (3)の式変形によっては, 不運なケースが出てくる可能性もあります。

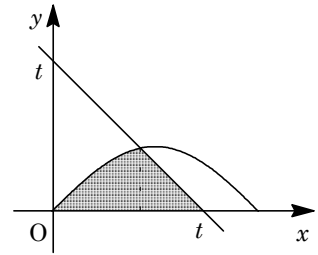
5

問題のページへ

領域 $0 < y < \sin x$, $0 < x < t - y$ に対して,
 $0 < t < 3$ より, の境界線 $y = \sin x$ と の境界線 $y = t - x$
 の交点はただ 1 つ存在し, それを $x = \alpha$ とおくと,

$$\sin \alpha = t - \alpha, \quad t = \alpha + \sin \alpha \dots\dots$$

このとき, 右図の網点部を x 軸のまわりに回転して得ら
 れる立体の体積 $V(t)$ は, を利用すると,



$$V(t) = \pi \int_0^{\alpha} \sin^2 x \, dx + \frac{1}{3} \pi (t - \alpha) \sin^2 \alpha = \pi \int_0^{\alpha} \sin^2 x \, dx + \frac{1}{3} \pi \sin^3 \alpha \dots\dots$$

ここで, から, $\frac{dt}{d\alpha} = 1 + \cos \alpha$ となり, より,

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{d\alpha} V(t) \frac{d\alpha}{dt} = (\pi \sin^2 \alpha + \pi \sin^2 \alpha \cos \alpha) \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \pi \sin^2 \alpha$$

さて, 条件より, $\frac{d}{dt} V(t) = \frac{\pi}{4}$ なので, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$

$0 < \alpha < 3$ から, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ となり, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ である。

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき, より $t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} < 3$ から適する。

$\alpha = \frac{5}{6}\pi$ のとき, より $t = \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2} > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ から適さない。

よって, $t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ であり, このとき, より,

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \, dx + \frac{1}{3} \pi \sin^3 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2x) \, dx + \frac{1}{24} \pi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{24} \pi = \frac{\pi^2}{12} - \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{24} \right) \pi \end{aligned}$$

[解 説]

$0 < x < \pi$ において, $y = \sin x$ のグラフは上に凸であり, $x = \pi$ における接線の傾きが -1 であることから, $y = \sin x$ と $y = t - x$ の交点はただ 1 つであることがわかります。また, $0 < \alpha < \pi$ において, t は α の単調増加関数なので, α は t の関数になっています。これらの点を省略して記しましたので, 補足しておきます。

6

問題のページへ

- (1) 右図のように、正六角形 X の各頂点を、 P, Q, R, S, T, U とおく。また、 Q, U が移る点を、それぞれ Q', U' とおくと、

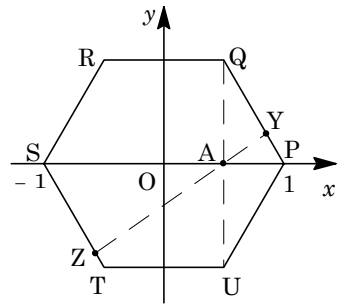
$$\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OP}, \quad A\overrightarrow{OQ'} + A\overrightarrow{OU'} = A\overrightarrow{OP}$$

P は P 自身に移ることより、

$$\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OP}, \quad \frac{\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'}}{2} = \frac{\overrightarrow{OP}}{2} \dots\dots\dots (*)$$

よって、 OP の中点を A とおくと、 $(*)$ は線分 $Q'U'$ の中点が A であることを意味する。

さて、 A を通る直線を描き、折れ線 UPQ との交点を Y 、折れ線 $QRSTU$ との交点を Z とおくと、 $AY = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $AZ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり、 $AY = AZ$ となるのは、点 Y, Z が点 Q, U に一致する場合である。



以上より、 $(Q', U') = (Q, U), (U, Q)$

$$P(1, 0), \quad Q\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ が移る点から, } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、すべての点が自分自身に移ることを表し、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は、 x 軸対称移動を表す。ともに、 X の各頂点は X のいずれかの頂点に移る。

- (2) P が移る点で場合分けをして、(1)と同様に考える。

(i) P が Q に移るとき $\frac{\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'}}{2} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{2}$ より、 $(Q', U') = (R, P), (P, R)$

(a) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 60° の回転移動を表す。

(b) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点を通り、 x 軸と 30° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(ii) P が R に移るとき $\frac{\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'}}{2} = \frac{\overrightarrow{OR}}{2}$ より, $(Q', U') = (S, Q)$, (Q, S)

(a) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 120° の回転移動を表す。

(b) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & -\cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点を通り, x 軸と 60° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(iii) P が S に移るとき $\frac{\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'}}{2} = \frac{\overrightarrow{OS}}{2}$ より, $(Q', U') = (T, R)$, (R, T)

(a) $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A は原点对称移動, すなわち原点のまわりに 180° の回転移動を表す。

(b) $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A は y 軸対称移動を表す。

(iv) P が T に移るとき $\frac{\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'}}{2} = \frac{\overrightarrow{OT}}{2}$ より, $(Q', U') = (U, S)$, (S, U)

(a) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 240° の回転移動を表す。

(b) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 240^\circ & \sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & -\cos 240^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点を通り, x 軸と 120° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(v) P が U に移るとき $\frac{\overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OU'}}{2} = \frac{\overrightarrow{OU}}{2}$ より, $(Q', U') = (P, T), (T, P)$

(a) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 300° の回転移動を表す。

(b) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 300^\circ & \sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & -\cos 300^\circ \end{pmatrix}$$

A は原点を通り, x 軸と 150° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(i) ~ (v) をまとめ, (1) の結果も合わせると,

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

また, これらの行列 A の表す移動で, X の各頂点は X のいずれかの頂点に移る。

[解 説]

(1) と同じスタイルで (2) を解くと, プロセスをかなり省いても, このように B5 版で 2 枚半ほどのスペースが必要です。質・量ともに, かなりハードな問題です。なお, (1) は, 最初, 逆ベクトルに注目しましたが, この考え方は (2) にうまくつながりません。再考したものが上の解です。