

1

解答解説のページへ

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$  とする。  $y < x < a$  を満たすすべての  $x, y$  に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような  $a$  の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a, b$  を正の実数とする。曲線  $C: y = x^3 - a^2x + a^3$  と点  $P(b, 0)$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $P$  から曲線  $C$  に接線がちょうど 3 本引けるような点  $(a, b)$  の存在する領域を図示せよ。
- (2) 点  $P$  から曲線  $C$  に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を  $A, B$  としたとき、 $\angle APB$  が  $90^\circ$  より小さくなるための  $a$  と  $b$  の条件を求めよ。

3

解答解説のページへ

1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて、次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し、4 枚のカードをよく混ぜて、再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して、5 桁の整数をつくる。得られた整数を  $X$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $X$  に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。
- (2)  $X$  に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。
- (3)  $X$  にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$  を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。
- (2) 点 Q が等式  $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$  を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。
- (3) 点 R が等式  $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$  を満たしながら動くとき、内積  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$  は R のとり方によらず一定であることを示せ。
- (4) (2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$  であることを示せ。

5

解答解説のページへ

 $0 < t < 3$  のとき, 連立不等式

$$0 \leq y \leq \sin x, \quad 0 \leq x \leq t - y$$

の表す領域を  $x$  軸のまわりに回転して得られる立体の体積を  $V(t)$  とする。

$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{\pi}{4}$  となる  $t$  と, そのときの  $V(t)$  の値を求めよ。

6

解答解説のページへ

$xy$  平面において、原点を中心とし  $P(1, 0)$  を頂点の 1 つとする正六角形を  $X$  とする。 $A$  を 2 次の正方行列とし、 $X$  の各頂点  $(x, y)$  に対して、行列  $A$  の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点  $(x', y')$  は  $X$  の辺上の点(頂点を含む)であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $P$  が行列  $A$  の表す移動で  $P$  自身に移るとき、 $X$  の各頂点は  $X$  のいずれかの頂点に移ることを示せ。また、そのときの行列  $A$  を求めよ。
- (2) 点  $P$  が行列  $A$  の表す移動で  $X$  のある頂点に移るとき、 $X$  の各頂点は  $X$  のいずれかの頂点に移ることを示せ。また、そのときの行列  $A$  を求めよ。