

1

問題のページへ

$$(1) \quad a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = (a+b-c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) \dots\dots\dots$$

すると, $a+b=c$ のとき, から, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つ。

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca = \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \} \geq 0 \dots\dots\dots$$

すると, $a+b=c$ のとき, から, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つ。

なお, 等号成立は, $a+b=c$ または $a=b=-c$ のときである。

[解 説]

有名な等式 と不等式 の知識を確認する問題です。

2

問題のページへ

(1) のりしろの部分を差し引いた $L-1$ 枚ともとの 1 枚の和で考えると,

$$S_1 = \{L(L-1) + (L+1)\} \times 1 = L^2 + 1$$

$$S_2 = \{(1-a)(L-1) + 1\} \times (L+1) = (1-a)L^2 + L + a$$

(2) $L=2$ のとき, $S_1 = 5$, $S_2 = 4(1-a) + 2 + a = -3a + 6$ となり, $S_1 - 1 < S_2$ より,

$$4 < -3a + 6, \quad 3a < 2$$

$$0 < a < 1 \text{ より, } 0 < a < \frac{2}{3}$$

(3) $S_1 - 1 < S_2$ より, $L^2 < (1-a)L^2 + L + a$, $aL^2 - L - a < 0$

ここで, $f(L) = aL^2 - L - a$ とおくと, $f(L) < 0$ となる 2 以上の自然数 L が存在する条件は, $0 < a < 1$, $f(0) = -a < 0$ に注意すると, $f(2) = 3a - 2 < 0$ であり,

$$0 < a < \frac{2}{3}$$

[解 説]

仰々しい設定の問題ですが, 内容は基本的です。

3

問題のページへ

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出されるのは、青 青 青 赤から、その確率は、

$$\frac{{}_7P_3 \times 3}{{}_{10}P_4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{8}$$

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される、すなわち赤玉 3 個、青玉 5 個が取り出される確率は、

$$\frac{{}_8C_3 \times 3! \times {}_7P_5}{{}_{10}P_8} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7}{15}$$

(3) 7 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される、すなわち赤玉 3 個、青玉 4 個が取り出される確率は、

$$\frac{{}_7C_3 \times 3! \times {}_7P_4}{{}_{10}P_7} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{7}{24}$$

すると、赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率は、(2)から、

$$\frac{7}{15} - \frac{7}{24} = \frac{7}{40}$$

(4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数は、

(i) 0 個のとき この場合の確率は、 $\frac{{}_7P_4}{{}_{10}P_4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{6}$ (ii) 1 個のとき この場合の確率は、 $\frac{{}_4C_1 \times {}_3P_1 \times {}_7P_3}{{}_{10}P_4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{2}$ (iii) 2 個のとき この場合の確率は、 $\frac{{}_4C_2 \times {}_3P_2 \times {}_7P_2}{{}_{10}P_4} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{10}$ (iv) 3 個のとき この場合の確率は、 $\frac{{}_4C_3 \times {}_3P_3 \times {}_7P_1}{{}_{10}P_4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{30}$

(i) ~ (iv) より、赤玉の個数の期待値は

$$0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$$

[解 説]

順列を同様に確からしいとしています。なお、(3)は(2)を利用した方法です。また、(3)までは文理共通です。

4

問題のページへ

- (1)
- $0 < a < \frac{\pi}{2}$
- ,
- $0 \leq \theta \leq \pi$
- において,
- $\sin \theta = \sin(\theta - 2a)$

とおくと,

$$\theta = \pi - (\theta - 2a), \quad \theta = \frac{\pi}{2} + a$$

すると, $f(\theta)$ は $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくない

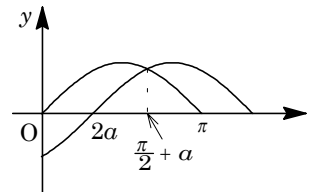
方より,

$$f(\theta) = \sin \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + a\right), \quad f(\theta) = \sin(\theta - 2a) \quad \left(\frac{\pi}{2} + a \leq \theta \leq \pi\right)$$

これは $a = 0$ のときも満たしている。さて, $I = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$ から,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}+a} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}+a}^\pi \sin(\theta - 2a) d\theta = -[\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}+a} - [\cos(\theta - 2a)]_{\frac{\pi}{2}+a}^\pi \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + 1 - \cos(\pi - 2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos 2a + 2 \sin a + 1 \end{aligned}$$

- (2) (1)より,
- $I = 1 - 2 \sin^2 a + 2 \sin a + 1 = -2\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

よって, $\sin a = \frac{1}{2}$ ($a = \frac{\pi}{6}$) のとき, I は最大値 $\frac{5}{2}$ をとる。

[解 説]

定積分の計算問題です。(2)で, 最大値を求めるのに, 微分をするまでもありませんでした。

5

問題のページへ

(1) 条件より, $APA = P^2 \dots\dots$ なので,

$$P^3 A = P^2 \cdot PA = APAPA = AP \cdot P^2 = AP^3 \dots\dots$$

(2) $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ より, $P^3 = \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$ となり, から,

$$\begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$$

$$ap^3 = ap^3 \dots\dots, bp^3 = bq^3 \dots\dots, cq^3 = cp^3 \dots\dots, dq^3 = dq^3 \dots\dots$$

すると, は成立し, より $b(p^3 - q^3) = 0$, より $c(p^3 - q^3) = 0$ (i) $p = q$ のとき も成立し, より,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + bc = p \dots\dots, b(a+d) = 0 \dots\dots$$

$$c(a+d) = 0 \dots\dots, bc + d^2 = p \dots\dots$$

 $a+d=0$ のとき, に代入すると, $p = -ad + bc < 0$ となり条件に反する。 $a+d \neq 0$ のとき, より $b=c=0$ となり, より, $a^2 = d^2 = p$ すると, $a+d \neq 0$ から, $a=d = \pm\sqrt{p}$ (ii) $p \neq q$ のとき から $b=c=0$ となり, より,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 p & 0 \\ 0 & d^2 q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 p = p^2 \dots\dots, d^2 q = q^2 \dots\dots$$

より, $a^2 = p$, $d^2 = q$ となり, $ad - bc = ad > 0$ から,

$$a = \pm\sqrt{p}, d = \pm\sqrt{q} \text{ (複号同順)}$$

(i)(ii)より, $b=c=0$, $a = \pm\sqrt{p}$, $d = \pm\sqrt{q}$ (複号同順) となり,

$$A = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

[解 説]

扱いやすい で解の候補を絞り, で確認するという構図になっています。なお, 計算量は見かけほどではありません。

6

問題のページへ

方程式 $|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0 \dots\dots$ に対して,

$$2a(2|x-2| - |x|) = |x(x-2)| - 1$$

ここで, $2|x-2| - |x| = 0$ とすると, $2(x-2) = \pm x$ から, $x = 4, \frac{4}{3}$ である。

$x = 4$ のとき $|x(x-2)| - 1 = 7$, $x = \frac{4}{3}$ のとき $|x(x-2)| - 1 = -\frac{1}{9}$ となり, ともに
は成立しない。よって, $2|x-2| - |x| \neq 0$ より, は,

$$a = \frac{|x(x-2)| - 1}{2(2|x-2| - |x|)} \dots\dots\dots$$

さて, の右辺を, $f(x) = \frac{|x(x-2)| - 1}{2(2|x-2| - |x|)}$ とおくと,

(i) $x < 0$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-2) - 1}{-2(x-2) + x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-2)(x-4) - (x^2 - 2x - 1)}{(x-4)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 8x + 9}{(x-4)^2}$$

x	-	...	0
$f'(x)$		-	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{8}$

これより, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

(ii) $0 < x < 2$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x(x-2) - 1}{-2(x-2) - x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x^2 + 2x - 1}{-3x + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2}{3x-4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x-1)(3x-4) - (x-1)^2 \cdot 3}{(3x-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)(3x-5)}{(3x-4)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}-0} f(x) = -$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}+0} f(x) =$$

x	0	...	1	...	$\frac{4}{3}$...	$\frac{5}{3}$...	2
$f'(x)$		+	0	-	×	-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{1}{8}$	↗	0	↘	×	↘	$\frac{2}{9}$	↗	$\frac{1}{4}$

これより, $f(x)$ の増減

は右表のようになる。

(iii) $x > 2$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-2) - 1}{2(x-2) - x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 4}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 8x + 9}{(x-4)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = -$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) =$$

x	2	...	4	...	$4 + \sqrt{7}$...	
$f'(x)$		-	×	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	↘	×	↘	$3 + \sqrt{7}$	↗	

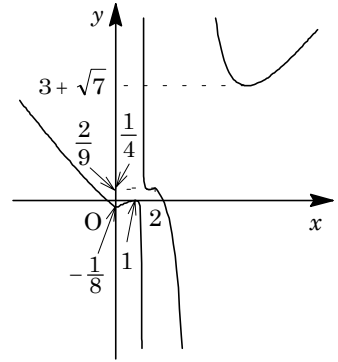
これより, $f(x)$ の増減は右表

のようになる。

(i) ~ (iii)より, $y = f(x)$ のグラフの概形を図示すると, 右図のようになる。

そこで, 方程式 すなわち $a = f(x)$ が相異なる 4 つの実数解をもつ条件は, 直線 $y = a$ と $y = f(x)$ のグラフが 4 つの共有点をもつ条件と等しいことより, 求める a の範囲は,

$$-\frac{1}{8} < a < 0, \quad \frac{2}{9} < a < \frac{1}{4}, \quad 3 + \sqrt{7} < a$$



[解 説]

定数分離した後の計算量は, 通常の数とはいえません。グラフもかなりデフォルメして描いていますが, それでも上のような表現力しかありません。