1　解答解説のページへ

多項式 $f(x)$ について，次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

(i) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$　　(ii) $f(1-x) = f(x)$　　(iii) $f(1) = 1$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 条件(i)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件(i), (ii), (iii)をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90^\circ$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。$\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_3}$ とする。$\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_4}$ とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に $\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$k = 1,\ 2,\ \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

3

解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\frac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし，空間の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とするとき, AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

(2) θ を動かしたとき, O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

5　　解答解説のページへ

a を実数として, 2 次の正方行列 A, B を次のように定める。

$$A=\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}$$

このとき, $((\cos t)A+(\sin t)B)^2=O$ を満たす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ。ただし, O は零行列とする。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C: x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。