1　　問題のページへ

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$ より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $q_n(x)$ とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，
$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)\\&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\left\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\right\}+b_nx\\&=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

ここで，x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_2=6$，$b_2=12$ なので，(＊)から，帰納的に a_n と b_n はともに 6 の倍数であり，素数の公約数として, 2 と 3 をもつ。

さて，a_n と b_n が 5 以上の素数 m を公約数としてもつとき, k, l を整数として,

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

(＊)から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$ より，a_{n-1} と b_{n-1} は素数 m を公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2 と b_2 は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは $a_2=6$，$b_2=12$ に反する。

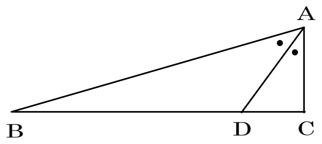
以上より，a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

[解 説]

(3)では，記述はしていませんが，a_3 と b_3 も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

2

問題のページへ



(1)　条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{5}$ より，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{24}{25}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin\frac{5}{12}\pi&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})\\&>\frac{1.414}{4}(1+1.732)>0.96=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

ここで，関数 $f(\theta)=\sin\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加し，$\sin\theta<\sin\dfrac{5}{12}\pi$ となることから，$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ である。

[解 説]

数値計算はあるものの，さほど面倒でもなく，あっさりと解決する問題です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{x}$

$x>0$ において，$f'(x)<0$ より，$f(x)$ は単調に減少し，

$$f(1)=1-\frac{1}{e}>0,\quad f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{n}<0$$

よって，$f(x)=0$ は $x\geqq 1$ にただ 1 つの解をもつ。

(2)　(1)より，$1<x_n<e^{\frac{1}{n}}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$ から，

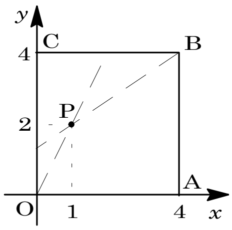
$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

[解 説]

(1)では，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)=-\infty$ より結論が導けますが，(2)につながりません。そこで，$f(x)$ の式を眺めて，$x=e^{\frac{1}{n}}$ のときの値を計算しました。

4

問題のページへ



(1)　O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 0)$，B$(4,\ 4)$，C$(0,\ 4)$，P$(1,\ 2)$とおき, l の長さを L とする。

まず, 点 P を通る直線が, $x=1$ のとき $L=4$ である。

次に, 点 P を通る直線は, その傾きを m とすると,

$$y-2=m(x-1),\ y=mx-m+2\cdots\cdots\cdots(*)$$

また, $(*)$と辺 OA の交点は, $0=mx-m+2$, $x=\dfrac{m-2}{m}$, $(*)$と辺 BC の交点は, $4=mx-m+2$, $x=\dfrac{m+2}{m}$ である。

さて, 点 P は, 辺 OA, BC から等距離にあるので, 対称性より $m\geqq 0$ で考える。

(i)　$0\leqq m<\dfrac{2}{3}$ のとき

$$L=(4-0)\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{1+m^2}$$

よって, m が増加すると, L は単調に増加する。

(ii)　$\dfrac{2}{3}\leqq m<2$ のとき

$$L=\left(\frac{m+2}{m}-0\right)\sqrt{1+m^2}=\sqrt{\frac{(m+2)^2(1+m^2)}{m^2}}$$

ここで, $f(m)=\dfrac{(m+2)^2(1+m^2)}{m^2}$ とおくと,

$$f'(m)=\frac{\{2(m+2)(1+m^2)+(m+2)^2\cdot 2m\}m^2-(m+2)^2(1+m^2)\cdot 2m}{m^4}$$

$$=\frac{2(m+2)\{(1+m^2+m^2+2m)m-(m+2)(1+m^2)\}}{m^3}$$

$$=\frac{2(m+2)(m^3-2)}{m^3}$$

すると, $f(m)$ の増減は右表のようになり, L は $m=\sqrt[3]{2}$ において極小値をとる。

m	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$	2
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	$\frac{208}{9}$	↘		↗	20

(iii)　$m\geqq 2$ のとき

$$L=\left(\frac{m+2}{m}-\frac{m-2}{m}\right)\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}$$

よって, m が増加すると, L は単調に減少する。

(i)〜(iii)より, L は $m=\dfrac{2}{3}$, $m=2$ において連続なので, $m=\dfrac{2}{3}$ のとき最大となる。

さらに, $m<0$ のときについても考え合わせると, $m=\pm\dfrac{2}{3}$ のとき, L は最大値 $\sqrt{\dfrac{208}{9}}=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$ をとる。このとき, 直線の方程式は,

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3},\ \ y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$$

(2)　まず，$m=0$ のとき，点 P を通る直線は $y=2$ となり，このとき $L=4$ である。

　また，$m\to\infty$ のとき $L\to 4$ となり，これは，点 P を通る直線が $x=1$ のとき，$L=4$ であることに対応する。

　さて，$f(\sqrt[3]{2})-4^2=\dfrac{(\sqrt[3]{2}+2)^2(1+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{4}}-16=(\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+4)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)-16$

$$=(\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+4)+(1+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})-16=3\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}-11$$

$$=3(\sqrt[3]{2}+1)^2-14$$

　ここで，$2>\dfrac{125}{64}$ から，$\sqrt[3]{2}>\dfrac{5}{4}$ となり，

$$3(\sqrt[3]{2}+1)^2-14>3\times\left(\frac{9}{4}\right)^2-14=\frac{19}{16}>0$$

　よって，$f(\sqrt[3]{2})>4^2$ となるので，点 P を通る直線が $y=2$ または $x=1$ のとき，L は最小値 4 をとる。

[解 説]

　対称性に気付くと，場合分けが半減しますが，それでもかなりの計算量です。特に，(2)の詰めには時間を費やしてしまいます。なお，上の解では，一般的に直線上の 2 点 $(x_1,\ mx_1+n)$，$(x_2,\ mx_2+n)$ の距離が $|x_1-x_2|\sqrt{1+m^2}$ であることを，説明なしで用いています。

5

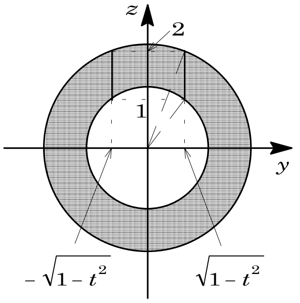
問題のページへ

点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分lを，z軸のまわりに1回転してできる円筒形Aの方程式は，

$$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

ここで，円筒形Aをx軸に垂直な平面$x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$で切断すると，その切り口は線分となり，

$$t^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$
$$y=\pm\sqrt{1-t^2},\ 1\leqq z\leqq 2$$



ここで，この2本の線分をx軸のまわりに1回転してできるドーナツ状の図形について，その外径をR，内径をrとおき，その面積を$S(t)$とすると，

$$\begin{aligned}S(t)&=\pi R^2-\pi r^2\\&=\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+2^2\right\}-\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+1^2\right\}\\&=\pi(5-t^2)-\pi(2-t^2)=3\pi\end{aligned}$$

よって，Aをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積をVとおくと，

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=\int_{-1}^{1}3\pi\,dt=6\pi$$

[解 説]

立体を回転してできる回転体の求積という，2代前の課程のころ，よく出題された問題です。回転軸に垂直な断面積を考えるのがポイントです。なお，円柱側面の方程式については，「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

6

問題のページへ

(1) $I_0(a)=\int_0^a\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}\left\{(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$ より，

$$\lim_{a\to\infty}a^{-\frac{3}{2}}I_0(a)=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{2}{3}$$

(2) $I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left[x^n(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\left\{I_{n-1}(a)+I_n(a)\right\}$$

すると，$\frac{3+2n}{3}I_n(a)=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}nI_{n-1}(a)$ より，

$$I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$$

(3) $a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^{-\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$

$$=\frac{2}{3+2n}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}\cdot\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$0\leqq x\leqq a$ において，$f(x)=x^n\sqrt{1+x}$ は単調に増加することより，

$$0\leqq x^n\sqrt{1+x}\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

これより，$0\leqq\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx\leqq\int_0^a a^n\sqrt{1+a}\,dx=a^{n+1}\sqrt{1+a}$ となり，

$$0\leqq I_{n-1}(a)\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

すると，$0\leqq\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\leqq\sqrt{\frac{1+a}{a^3}}=\sqrt{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^2}}$ となり, $a\to\infty$のとき $\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\to 0$

よって, (*)から，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}$

[解 説]

(3)は(2)の漸化式を誘導として考えるのが筋でしょうが，この式を変形する方法は思いつきません。そこで，直接的に $I_n(a)$ を評価し，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)$ を考えましたが，うまくいきません。ただ，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$ であれば極限値が求まるという発見は，その直後でした。