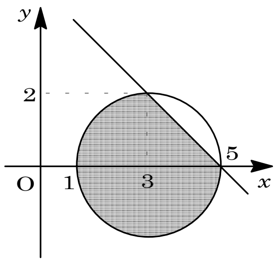
1

問題のページへ

領域 D： $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$， $x+y\leqq 5$ より，

$$(x-3)^2+y^2\leqq 4,\ \ y\leqq -x+5$$

領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



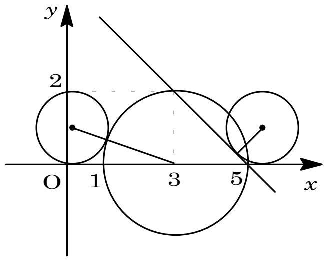
また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ に対して，

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，方程式(＊)は，中心 $(a,\ 1)$，半径 1 の円を表す。

右図より，実数 a が最大となるのは，円(＊)が領域 D の境界線 $x+y-5=0$ に接するときなので，

$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\ \ |a-4|=\sqrt{2}$$



$a>4$ より，a の最大値は，$a=4+\sqrt{2}$ である。

また，実数 a が最小となるのは，円(＊)が領域 D の境界線 $(x-3)^2+y^2=4$ に接するときなので，

$$\sqrt{(a-3)^2+1^2}=2+1,\ \ (a-3)^2=8$$

$a<3$ より，a の最小値は，$a=3-2\sqrt{2}$ である。

[解 説]

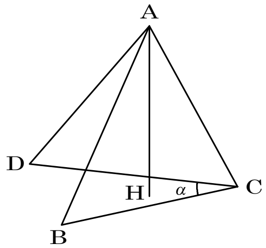
領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線，円と円が接する条件の処理がポイントです。

2

問題のページへ

(1)　x, y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ となる。

ここで，条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = 1$



$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$ より，$(x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$

$$x|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$$

$$x + y\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より，$(x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$

$$x\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} + y|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0,\quad x\cos\alpha + y - \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1-\cos^2\alpha)}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}$

(2)　(1)より，$x = y = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = |x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + x\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = x^2 + x^2 + 1 + 2x^2\cos\alpha - 2x \cdot \frac{1}{2} - 2x \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2(1+\cos\alpha)x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} - 2 \cdot \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} + 1$$

$$= \frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \sqrt{\dfrac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$ となる。

(3)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

H が△BCD の重心となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので，

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{1}{3},\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ < \alpha < 120^\circ$ から，$\alpha = 60^\circ$

[解 説]

冒頭の $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ がポイントとなります。なお，連立方程式は，係数に文字が入っていたので，行列を用いて解いています。

3

問題のページへ

(1)　$0 \leqq k \leqq 10$ として, 10 回引いて k 回当たる確率 P_k は,

$$P_k = {}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}$$

よって, 景品の相当額の期待値 E は,

$$E = \sum_{k=0}^{10} 10^4 k \cdot P_k = 10^4 \sum_{k=1}^{10} k \cdot {}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}$$

$$= 10^4 \sum_{k=1}^{10} 10 \cdot {}_{9}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k} = \frac{10^5}{500}\sum_{k=1}^{10} {}_{9}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{500}\right)^{k-1}\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}$$

$$= 200\left(\frac{1}{500} + \frac{499}{500}\right)^9 = 200$$

(2)　1 回くじを引いたとき, 2 人がともに当たりまたは外れの確率 q は,

$$q = \left(\frac{1}{500}\right)^2 + \left(\frac{499}{500}\right)^2 = \left(\frac{1}{500}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{500}\right)^2 = 1 - \frac{1}{250} + \frac{2}{500^2}$$

ここで, $a = \dfrac{2}{500^2} = 8 \times 10^{-6}$ とおくと, $10^{-6} < a < 10^{-5}$ となり, 4 回くじを引いたとき, 当たり外れの順序が一致する確率は,

$$q^4 = \left(1 - \frac{1}{250} + a\right)^4 = \left(1 - \frac{1}{250}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_1\left(1 - \frac{1}{250}\right)^3 a + \cdots\cdots + a^4$$

さて, ${}_4\mathrm{C}_1\left(1 - \dfrac{1}{250}\right)^3 a < 4 \times 10^{-5}$ から, q^4 の小数第 3 位までは $\left(1 - \dfrac{1}{250}\right)^4$ を展開した値によって決定するので,

$$\left(1 - \frac{1}{250}\right)^4 = 1 - {}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{250} + {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{250}\right)^2 - {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{250}\right)^3 + \left(\frac{1}{250}\right)^4$$

$$= 1 - 1.6 \times 10^{-2} + 9.6 \times 10^{-5} - 2.56 \times 10^{-7} + 2.56 \times 10^{-10}$$

よって, q^4 の小数第 3 位までは $1 - 1.6 \times 10^{-2} = 0.984$ より, q^4　0.98 となる。

(3)　抽選券を x 枚配布したとすると, 景品の相当額の期待値は, (1)と同様にして, $20x$ 円となるので, くじに要する経費は $300000 + 20x$ 円となる。

また, くじ管理組合に拠出された手数料は $35x$ 円なので, 条件より,

$$35x \geqq 300000 + 20x, \quad x \geqq 20000$$

よって, 商店街の商品売り上げ目標は, $1000 \times 20000 = 2000$ 万円以上である。

[解 説]

(1)では数 C の知識を前提としない解法をとり, 組合せの公式 $k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ と二項定理を利用しています。また, (2)は, 答を大雑把に導くことは容易なのですが, 誤差の処理は面倒です。もう少し丁寧に書いた方がよかったかもしれません。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ に対し，$f'(x)=\sin\frac{\pi}{x}+x\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)=\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$ から，

$$f'(2)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

また，$f''(x)=\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)+\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)=-\frac{\pi^2}{x^3}\sin\frac{\pi}{x}$ ………①

ここで, $x>2$ のとき $0<\frac{\pi}{x}<\frac{\pi}{2}$ から，$f''(x)<0$ となり，

$$f'(x)<f'(2)=1$$

(2)　(1)より，$f'\left(\frac{1}{k}\right)=\sin k\pi-k\pi\cos k\pi=-k\pi(-1)^k=(-1)^{k+1}k\pi$

(3)　まず, (1)から $f'(x)=1$ となる x の最大の値は 2 より，$x_1=2$ である。

次に，$1<x\leqq 2$ のとき $\frac{\pi}{2}\leqq\frac{\pi}{x}<\pi$ から $f''(x)<0$ であり，この区間で $f'(x)$ は単調減少をするので，$x_2<1$ となる。

さて, $k\geqq 1$ のとき，①から $f''\left(\frac{1}{k}\right)=0$ となり, (2)より，

$$\left|f'\left(\frac{1}{k}\right)\right|=|(-1)^{k+1}k\pi|=k\pi>1 \text{ ………②}$$

また, $n\geqq 2$ のとき，$\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$ において，$(n-1)\pi<\frac{\pi}{x}<n\pi$ から，

(i)　n が偶数のとき　$f''(x)>0$

(ii)　n が奇数のとき　$f''(x)<0$

よって，区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$ において $f'(x)$ は単調増加または単調減少であり，②から，この区間内に $f'(x)=1$ となる x がただ 1 つ存在する。

以上より，$\frac{1}{2}<x_2<\frac{1}{1}$，$\frac{1}{3}<x_3<\frac{1}{2}$，…となるので，$\frac{1}{n}<x_n<\frac{1}{n-1}$ である。

(4)　(3)より, $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{n}\to 0$，$\frac{1}{n-1}\to 0$ から $x_n\to 0$ となり，合わせて，

$$|f(x_n)|=\left|x_n\sin\frac{\pi}{x_n}\right|\leqq|x_n|$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$

[解 説]

下書きとして，$f''(x)$ の符号変化から $f'(x)$ のグラフを想像して描き，それを見ながら方針を立てました。なお, (4)は意外な設問でした。

5

問題のページへ

(1)　$A+B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$から,

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

これより，$k\geqq 2$ のとき，$(A+B)^k=(A+B)^2$ と予測でき，この予測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=2$ のとき　明らかに成立する。

(ii)　$k=l$ のとき　$(A+B)^l=(A+B)^2$ と仮定する。

$$(A+B)^{l+1}=(A+B)^2(A+B)=(A+B)^3=(A+B)^2$$

(i)(ii)より，$(A+B)^k=(A+B)^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$である。

(2)　$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A$ より，帰納的に $A^m=A$ である。

$$AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$AB^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

以上より，$n=1$ のとき $A^mB^n=AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $n\geqq 2$ のとき $A^mB^n=O$

また，$BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$B^2A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

以上より，$n=1$ のとき $B^nA^m=BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $n\geqq 2$ のとき $B^nA^m=O$

(3)　$(A+B)X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1&y_2&y_3\\y_1+z_1&y_2+z_2&y_3+z_3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$(A+B)X=O$ なので，$y_1=y_2=y_3=z_1=z_2=z_3=0$ となり，このとき，

$$X(A+B)=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_1+x_2&x_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

さらに，$X(A+B)=O$ なので，$x_1=x_2=0$ である。

以上より，$X=\begin{pmatrix}0&0&x_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ （x_3 は任意の数）

[解 説]

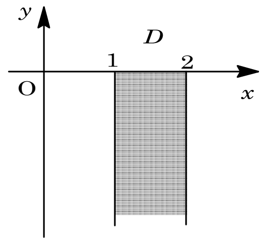
3 次の正方行列の計算問題です。3 つの小問の関連はほとんどありません。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$D:1\leqq x\leqq 2,\ \ y\geqq 0$，$E:y\geqq x^2-3ax+2a^2$ に対して，領域 E の境界線は,

$$y=x^2-3ax+2a^2=(x-a)(x-2a)\cdots\cdots\cdots(*)$$



まず, $a\leqq 0$ のときは, 領域 D と E は明らかに共有点をもたない。

そこで, $a>0$ のとき, D と E とが共有点をもつ条件は, $(*)$と x 軸の交点が $x=a$, $2a$ より, $a\leqq 2$ かつ $2a\geqq 1$ である。よって, $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 2$ となる。

(2)　(i)　$2a\leqq 2\left(\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)$のとき

$$S(a)=\int_1^{2a}-(x^2-3ax+2a^2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3a\cdot\frac{x^2}{2}-2a^2x\right]_1^{2a}$$

$$=-\frac{1}{3}(8a^3-1)+\frac{3}{2}a(4a^2-1)-2a^2(2a-1)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}$$

(ii)　$1\leqq a\ (1\leqq a\leqq 2)$ のとき

$$S(a)=\int_a^{2}-(x^2-3ax+2a^2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3a\cdot\frac{x^2}{2}-2a^2x\right]_a^{2}$$

$$=-\frac{1}{3}(8-a^3)+\frac{3}{2}a(4-a^2)-2a^2(2-a)=\frac{5}{6}a^3-4a^2+6a-\frac{8}{3}$$

(3)　(i)　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$S'(a)=-2a^2+4a-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(2a-1)(2a-3)$$

右表より，$S(a)$ は単調に増加する。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

(ii)　$1\leqq a\leqq 2$ のとき

$$S'(a)=\frac{5}{2}a^2-8a+6$$

$$=\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	0
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

(i)(ii)より，$S(a)$ の最大値は,

$$S\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{16}{75}$$

[解 説]

頻出の放物線と面積の問題です。領域で味付けがしてありますが。