1

問題のページへ

まず，条件(i)より，$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$ ………①

また，条件(ii)より，$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$，$(1-t)\vec{a}-t\vec{b}=(2t-1)\vec{e}$ ………②

①②より，$2(1-t)\vec{a}=2t\vec{e}$，$2t\vec{b}=2(1-t)\vec{e}$ となり，

$$\vec{a}=\frac{t}{1-t}\vec{e}\ \text{………③},\quad \vec{b}=\frac{1-t}{t}\vec{e}\ \text{………④}$$

すると，$\vec{x}-\vec{a}=\vec{x}-\dfrac{t}{1-t}\vec{e}=\dfrac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}$ ………⑤

$$\vec{x}-\vec{b}=\vec{x}-\frac{1-t}{t}\vec{e}=\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\ \text{………⑥}$$

さて，条件$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ に，⑤⑥を適用すると，

$$\{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}\}\cdot\{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}\}=0$$

$$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+t^2+t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)|\vec{e}|^2=0$$

$|\vec{e}|=1$ より，$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ ………⑦

また，条件$|\vec{x}-\vec{a}|:|\vec{x}-\vec{b}|=t:1-t$ に，⑤⑥を適用すると，

$$(1-t)\left|\frac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}\right|=t\left|\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\right|,\quad |(1-t)\vec{x}-t\vec{e}|=|t\vec{x}-(1-t)\vec{e}|$$

$$(1-t)^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+t^2|\vec{e}|^2=t^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+(1-t)^2|\vec{e}|^2$$

$|\vec{e}|=1$ より，$(1-2t)|\vec{x}|^2=1-2t$ となり，$0<t<\dfrac{1}{2}$ から$|\vec{x}|^2=1$ ………⑧

⑦⑧より，$t(1-t)-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ となるので，

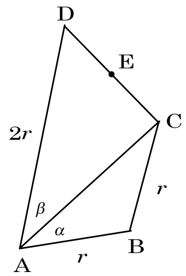
$$\vec{x}\cdot\vec{e}=\frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2}$$

[解 説]

文字がたくさん出てくるので，方針を明確にし，交通整理をしながら計算を進めます。ここでは，まず$\vec{a}$，$\vec{b}$ を消去するために，③と④を導きました。

2

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC は二等辺三角形なので，$\mathrm{AC} = 2\mathrm{AB}\cos\alpha = 2r\cos\alpha$

そこで，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\alpha = r^2\cos\alpha\sin\alpha$

$$\triangle\mathrm{ADC} = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\beta = 2r^2\cos\alpha\sin\beta$$

条件より，$\triangle\mathrm{ADC} = 2\triangle\mathrm{ABC}$ なので，

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

よって，$\alpha = \beta$ または $\alpha = 180° - \beta$

すると，条件より $\alpha + \beta < 180°$ なので，$\alpha = \beta$ である。

(2)　$\alpha = \beta$ より，$\mathrm{AC} = 2r\cos\beta$ となるので，$\angle\mathrm{ACD} = 90°$ であり，

$$\mathrm{CD} = 2r\sin\beta = 2r\sin\alpha$$

さて，$\triangle\mathrm{ACE} = \triangle\mathrm{ADE}$ から，点 E は辺 CD の中点となり，

$$\mathrm{CE} = \frac{1}{2}\mathrm{CD} = r\sin\alpha$$

ここで，$\angle\mathrm{CAE} = \theta$ とおくと，

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}} = \frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\alpha \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$ なので，$2\alpha < 90°$ から $\tan 2\alpha = \dfrac{4}{3}$ となり，

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3},\ 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0,\ (2\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 2) = 0$$

$\alpha < 90°$ から $\tan\alpha > 0$ なので，$\tan\alpha = \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$\tan\theta = \dfrac{1}{4}$ となり，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ である。

[解 説]

問題の図からも想像できますが，$\triangle$ACD は直角三角形です。この発見がポイントになります。

3

問題のページへ

(1)　i 回目に取り出したカードの数字を x_i とすると，得点が k となるのは,

$$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{k-2} < x_{k-1} \geqq x_k \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$x_{k-1} = l\ (k-1 \leqq l \leqq n)$ とおくと，$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{k-2} < l$ を満たす $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-2})$ の組は ${}_{l-1}\mathrm{C}_{k-2}$ 個あり，$l \geqq x_k$ となる x_k は l 個ある。これより，①となる確率 p_k は,

$$p_k = \sum_{l=k-1}^{n} \frac{{}_{l-1}\mathrm{C}_{k-2} \times 1 \times l}{n^k} = \frac{1}{n^k}\sum_{l=k-1}^{n} \frac{(l-1)! \times l}{(k-2)!(l-k+1)!}$$

$$= \frac{k-1}{n^k}\sum_{l=k-1}^{n} \frac{l!}{(k-1)!(l-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k}\sum_{l=k-1}^{n} {}_l\mathrm{C}_{k-1}$$

さて，一般的に，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_n\mathrm{C}_r - {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が成り立つので，$n \geqq k$ のとき,

$$p_k = \frac{k-1}{n^k}\left\{ {}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1} + \sum_{l=k}^{n}\left({}_{l+1}\mathrm{C}_k - {}_l\mathrm{C}_k \right) \right\}$$

$$= \frac{k-1}{n^k}\left\{ 1 + \left({}_{k+1}\mathrm{C}_k - {}_k\mathrm{C}_k \right) + \left({}_{k+2}\mathrm{C}_k - {}_{k+1}\mathrm{C}_k \right) + \cdots + \left({}_{n+1}\mathrm{C}_k - {}_n\mathrm{C}_k \right) \right\}$$

$$= \frac{k-1}{n^k}\ {}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdots\cdots\cdots ②$$

$n = k-1$ のとき，$p_k = \dfrac{k-1}{n^k}\ {}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1} = \dfrac{k-1}{n^k}$ となり，②は $n = k-1$ のときも成立する。よって，$2 \leqq k \leqq n+1$ のとき，$p_k = \dfrac{k-1}{n^k}\ {}_{n+1}\mathrm{C}_k$ である。

(2)　得点 k の期待値が $f(n)$ より,

$$f(n) = \sum_{k=2}^{n+1} kp_k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k}\ {}_{n+1}\mathrm{C}_k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{n(n+1)}{n^k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n+1-k)!} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{n+1}{n^{k-1}}\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}$$

$$= \frac{n+1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

よって，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

[解　説]

いろいろな解法が考えられますが，組合せに関する公式 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ を利用する方法を採りました。なお, (2)の結論は想定外でした。

4

問題のページへ

曲線 C_1 : $y = ax^2 + bx + c$ ……①に対して，

$$C_2 : y = x^2 - x + \frac{3}{4}\ (x > 0)\ \cdots\cdots\text{②},\quad y = x^2 + 2x + \frac{3}{4}\ (x \leqq 0)\ \cdots\cdots\text{③}$$

$x > 0$ において，①と②が接することより，

$$ax^2 + bx + c = x^2 - x + \frac{3}{4},\quad (1-a)x^2 - (1+b)x + \frac{3}{4} - c = 0\ \cdots\cdots\text{④}$$

$$D = (1+b)^2 - (1-a)(3-4c) = 0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

$x \leqq 0$ において，①と③が接することより，

$$ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + \frac{3}{4},\quad (1-a)x^2 + (2-b)x + \frac{3}{4} - c = 0\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

$$D = (2-b)^2 - (1-a)(3-4c) = 0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

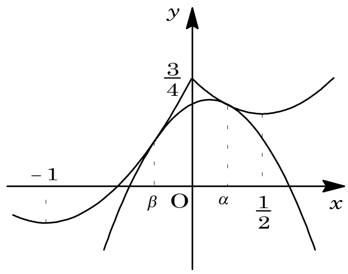
⑤⑦より，$(1+b)^2 - (2-b)^2 = 0$，$2b - 1 = 0$ から，$b = \frac{1}{2}$

さて，①と②の接点は，④から，

$$x = \frac{1+b}{2(1-a)} = \frac{3}{4(1-a)}$$

また，①と③の接点は，⑥から，

$$x = \frac{-(2-b)}{2(1-a)} = -\frac{3}{4(1-a)}$$



ここで，$\alpha = \frac{3}{4(1-a)}$，$\beta = -\frac{3}{4(1-a)}$ とおくと，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_\beta^0 (1-a)(x-\beta)^2 dx + \int_0^\alpha (1-a)(x-\alpha)^2 dx$$

$$= \frac{1-a}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_\beta^0 + \frac{1-a}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_0^\alpha = \frac{1-a}{3}(-\beta)^3 - \frac{1-a}{3}(-\alpha)^3$$

$$= \frac{1-a}{3}\cdot\frac{27}{64(1-a)^3} + \frac{1-a}{3}\cdot\frac{27}{64(1-a)^3} = \frac{9}{32(1-a)^2}$$

[解 説]

接する放物線どうしで挟まれた部分の面積を求める問題です。基本的な頻出題です。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1) $C\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} ay+bz & ax+bw \\ aw+bx & az+by \end{pmatrix}$$

条件より，$ay+bz=1$ ………①，$ax+bw=0$ ………②

$aw+bx=0$ ………③，$az+by=-1$ ………④

①④より，$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$となり，$a^2\neq b^2$から，

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a+b \\ -a-b \end{pmatrix}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

②③より，$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となり，$a^2\neq b^2$から，

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上より，$C=\dfrac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$となる。

(2) $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$とおくと，条件より，

$aA_{n+1}P+bPA_n=D$ ………⑤，$aCP+bPC=D$ ………⑥

⑤⑥より，$a(A_{n+1}-C)P+bP(A_n-C)=O$，$(A_{n+1}-C)P=-\dfrac{b}{a}P(A_n-C)$

ここで，$A_n-C=B_n$とおくと，$B_{n+1}P=-\dfrac{b}{a}PB_n$となる。

さらに，$P^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=P$から，

$$B_{n+1}=-\frac{b}{a}PB_nP^{-1}=-\frac{b}{a}PB_nP$$

これより帰納的に，$B_n=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{n-1}P^{n-1}B_1P^{n-1}$となり，

$$A_n=C+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}P^{n-1}B_1P^{n-1}$$

さて，$B_1=A_1-C=\dfrac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\dfrac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

また，$P^{-1}=P$から$P^2=E$（Eは単位行列）であり，nが偶数のときは$P^n=E$，nが奇数のときは$P^n=P$となるので, nを偶奇に分けてA_nを計算する。

(i) $n-1$が偶数（nが奇数）のとき

$$A_n=C+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}EB_1E=C+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}B_1$$

$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{a-b}\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}0&-\frac{b}{a}\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n}\\-1+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}&0\end{pmatrix}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\\-1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}&0\end{pmatrix}$$

(ii)　$n-1$ が奇数（n が偶数）のとき

$$A_n=C+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}PB_1P$$

$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{a-b}\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{b}{a}\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{a-b}\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{b}{a}&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}\\-1+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n}&0\end{pmatrix}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\\-1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n}&0\end{pmatrix}$$

(3)　$n\to\infty$のとき A_n のすべての成分が収束するための条件は，$a\neq\pm b$ より，

$$-1<\frac{b}{a}<1,\ \left|\frac{b}{a}\right|<1,\ |a|>|b|$$

よって，$a^2>b^2$ である。

[解 説]

行列と漸化式の融合問題です。誘導がついており，その利用方法も明快なのですが，結論に至るまでの計算量はかなりのものです。

6

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ に対して,

$$f'(x)=\frac{-2\sin 2x(a\cos x+1)-(\cos 2x-2)(-a\sin x)}{(a\cos x+1)^2}$$

$$=\frac{\sin x\{-4\cos x(a\cos x+1)+a(2\cos^2 x-3)\}}{(a\cos x+1)^2}$$

$$=-\frac{\sin x(2a\cos^2 x+4\cos x+3a)}{(a\cos x+1)^2}$$

ここで，$g(x)=2a\cos^2 x+4\cos x+3a$ とおくと，$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる条件は，$0<x<\pi$ において $g(x)\geqq 0$ と同値である。

さらに，$t=\cos x$，$h(t)=g(x)$ とおくと，$0<x<\pi$ から $-1<t<1$ のもとで,

$$h(t)=2at^2+4t+3a=2a\left(t+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{2}{a}+3a$$

$0<a<1$ から $-\dfrac{1}{a}<-1$ となるので，$-1<t<1$ において $h(t)\geqq 0$ となる条件は,

$$h(-1)=5a-4\geqq 0,\ \ a\geqq\frac{4}{5}$$

よって, $0<a<1$ より，$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ である。

(2)　(i)　$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ のとき

(1)より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数なので，最大値は $f(0)$ である。

(ii)　$0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき

$h(-1)=5a-4<0$，$h(1)=5a+4>0$ より，$-1<t<1$ において $h(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおく。すると，$-1\leqq t<\alpha$ において $h(t)<0$，$\alpha<t\leqq 1$ において $h(t)>0$ となる。

さらに，$\alpha=\cos\beta$ とおくと，$\beta<x\leqq\pi$ において $g(x)<0$，$0\leqq x<\beta$ において $g(x)>0$ となる。

よって，$f(x)$ の増減は右表のようになり,

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f(0)-f(\pi)=-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\frac{-2a}{(a+1)(a-1)}>0$$

以上より，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値は $f(0)$ である。

[解 説]

一見，平易に見えますが，関数の増減に関する興味深い問題です。置き換えを行って，思考の対象を絞り，グラフをイメージしながら解きました。