

1

問題のページへ

$$(1) \quad |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = \frac{1}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ここで, } |k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2 + 2kl\vec{a} \cdot \vec{b} + l^2|\vec{b}|^2 = k^2 + kl + \frac{1}{2}l^2$$

よって, $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ が整数である条件は, $\frac{1}{2}l^2$ が整数すなわち l が偶数である。

$$(2) \quad |k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = 0 \text{ より, } k^2 + kl + \frac{1}{2}l^2 = 0 \dots\dots\dots (*)$$

(1)より, l は偶数なので, n を整数として, $l = 2n$ とおくと, (*)から,

$$k^2 + 2kn + 2n^2 = 0, \quad (k+n)^2 + n^2 = 0$$

よって, $k+n = n = 0$ すなわち $(k, n) = (0, 0)$ より, $(k, l) = (0, 0)$

$$(3) \quad F = |k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = k^2 + kl + \frac{1}{2}l^2 \text{ とおくと,}$$

(i) l が偶数 ($l = 2n$) のとき

$F = (k+n)^2 + n^2$ となり, $(k, n) \neq (0, 0)$ より, F の最小値は 1 である。

(ii) l が奇数 ($l = 2n+1$) のとき

$$F = k^2 + k(2n+1) + \frac{1}{2}(2n+1)^2 = \left(k + \frac{2n+1}{2}\right)^2 + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

k は整数より, $k = -n-1$ または $k = -n$ のとき, F は最小となり,

$$F = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

n は整数より, $n = 0$ または $n = -1$ のとき, F は最小値 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ をとる。

(i)(ii)より, F の最小値は $\frac{1}{2}$ である。このとき, $(k, l) = (k, 2n+1)$ の組は,

$$(k, l) = (-1, 1), (0, 1), (0, -1), (1, -1)$$

[解 説]

(3)は, いわゆる 1 文字固定の考え方で, 最小値を求めています。

2

問題のページへ

$$(1) C_1 : x = \frac{15}{2}t^4, y = -3t^5 + 5t^3 \text{ より,}$$

$$\frac{dx}{dt} = 30t^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -15t^4 + 15t^2 = -15t^2(t+1)(t-1)$$

C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \int_0^{\frac{125}{6}} y dx = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} (-3t^5 + 5t^3) \cdot 30t^3 dt$$

$$= 30 \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} (-3t^8 + 5t^6) dt$$

$$= 30 \left[-\frac{t^9}{9} + 5 \cdot \frac{t^7}{7} \right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} = 30 \left(\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \right)^7 \left(-\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{7} \right) \right) = \frac{12500}{567} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

t	0	...	1	...	$\sqrt{\frac{5}{3}}$
$\frac{dx}{dt}$	0	+		+	
x	0	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$\frac{125}{6}$
$\frac{dy}{dt}$	0	+	0	-	
y	0	↗	2	↘	0

(2) まず, C_1 上における道のりを l_1 とすると,

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (30t^3)^2 + (-15t^4 + 15t^2)^2 = 15^2 t^4 (t^2 + 1)^2$$

$$l_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \sqrt{15^2 t^4 (t^2 + 1)^2} dt = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} 15t^2 (t^2 + 1) dt = 15 \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

$$= 15 \left(\frac{9}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{9}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \right) = \frac{50}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

次に, C_2 上における道のりを l_2 とすると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{125}{6} \cdot 3 \cos^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \cdot \left\{ 2\pi \sin \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \right\}$$

$$= 125\pi \cos^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \cdot \sin \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{125}{6} \cdot 3 \sin^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \cdot \left\{ -2\pi \cos \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \right\}$$

$$= -125\pi \sin^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \cdot \cos \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right)$$

これより, $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 125^2 \pi^2 \sin^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \cdot \cos^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right)$

$$l_2 = \int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}} \sqrt{125^2 \pi^2 \sin^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \cdot \cos^2 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right)} dt$$

ここで, $2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) = \theta$ とおくと,

$$l_2 = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} 125\pi \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) d\theta = \frac{125}{2} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{125}{4} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = -\frac{125}{8} [\cos 2\theta]_0^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{125}{4}$$

さらに、 C_3 は $x=0$ より y 軸を表し、 $\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leq t \leq 2$ のとき、 y 軸上での線分の両端の座標は $(0, -\frac{125}{6})$ と $(0, 0)$ である。その道のりを l_3 とすると、

$$l_3 = 0 - (-\frac{125}{6}) = \frac{125}{6}$$

$$\text{以上より、} l_1 + l_2 + l_3 = \frac{50}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{125}{4} + \frac{125}{6} = \frac{50}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{625}{12}$$

[解 説]

丁寧に計算を進めるだけの問題ですが、見かけに圧倒され、後回しにしたいくなります。

3

問題のページへ

等差数列 x_0, x_1, \dots, x_n の公差は $\frac{1}{n}$, 等比数列 y_0, y_1, \dots, y_n の公比は $2^{\frac{1}{n}}$ より,

$$x_k = 1 + \frac{k}{n}, \quad y_k = 2^{\frac{k}{n}}$$

すると, $P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \int_0^1 (1+x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \int_0^1 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}$$

また, $Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ より,

$$\log Q(n) = \frac{1}{n} \log(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log Q(n) &= \int_0^1 \log(1+x) dx = \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx \\ &= 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e} \end{aligned}$$

ここで, $f(x) = \log x$ は $x > 0$ において連続であることより, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{4}{e}$

同様にして, $S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$ より,

$$\log S(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log 2^{\frac{k}{n}} = \frac{\log 2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{\log 2}{2n} (n+1)$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log S(n) = \frac{\log 2}{2} = \log \sqrt{2}$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \sqrt{2}$

[解 説]

単純な構図の問題ですが, 4 つの極限とも, きれいな数値として求まります。いろいろな解法がありますが, 最初に考えたものを記しました。

4

問題のページへ

(1) $p_1 = p_6$, $p_2 = p_5$, $p_3 = p_4$ より, $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 1$ となり,

$$p_3 = \frac{1}{2} - p_1 - p_2$$

サイコロを 3 回振ったとき総和が 5 となるのは, (1, 1, 3), (1, 2, 2) の 2 つの場合がある。出る目の順序も考えて,

$$\begin{aligned} Q(5) &= p_1^2 p_3 \times 3 + p_1 p_2^2 \times 3 = 3p_1^2 \left(\frac{1}{2} - p_1 - p_2 \right) + 3p_1 p_2^2 \\ &= \frac{3}{2} p_1^2 - 3p_1^3 - 3p_1^2 p_2 + 3p_1 p_2^2 \end{aligned}$$

(2) $p_3 = \frac{1}{6}$ のとき, $p_1 + p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ である。

サイコロを 3 回振ったとき総和が 7 となるのは, (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3) の 4 つの場合があるので,

$$\begin{aligned} Q(7) &= p_1^2 p_2 \times 3 + p_1 p_2 p_3 \times 3! + p_1 p_3^2 \times 3 + p_2^2 p_3 \times 3 \\ &= 3p_1^2 \left(\frac{1}{3} - p_1 \right) + p_1 \left(\frac{1}{3} - p_1 \right) + \frac{1}{12} p_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - p_1 \right)^2 \\ &= -3p_1^3 + \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{12} p_1 + \frac{1}{18} \end{aligned}$$

ここで, $0 < x < \frac{1}{3}$ において, $f(x) = -3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{18}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -9x^2 + x + \frac{1}{12} \\ &= -\frac{1}{12}(18x+1)(6x-1) \end{aligned}$$

x	0	...	$\frac{1}{6}$...	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{5}{72}$	↘	

右表より, $f(x)$ の最大値は $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{72}$ と

なる。

よって, $Q(7)$ がとり得る最大の値は $\frac{5}{72}$ であり, このとき $p_1 = p_2 = \frac{1}{6}$ となる。

[解 説]

基本題です。サイコロを 3 回しか振らないので, 数えもれもないでしょう。

5

問題のページへ

$$(1) |z|=1 \text{ より, } z\bar{z}=1, \bar{z}=\frac{1}{z} \dots\dots\dots$$

さて, $z^3 - z$ の実部は, $\frac{1}{2}(z^3 - z + \overline{z^3 - z}) = \frac{1}{2}(z^3 - z + \bar{z}^3 - \bar{z})$ と表せる。

条件より, $z^3 - z + \bar{z}^3 - \bar{z} = 0$ となり, から $z^3 - z + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} = 0$

$$z^6 - z^4 + 1 - z^2 = 0, (z^4 - 1)(z^2 - 1) = 0, (z^2 + 1)(z^2 - 1)^2 = 0$$

よって, $z^2 = \pm 1$ より, $z = \pm 1, \pm i$

$$(2) |z^5 + z| = 1 \text{ より, } |z||z^4 + 1| = 1 \text{ となり, } |z|=1 \text{ から } |z^4 + 1| = 1 \dots\dots\dots$$

ここで, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと, から,

$$(\cos 4\theta + 1)^2 + \sin^2 4\theta = 1, 2 + 2\cos 4\theta = 1, \cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$

よって, $4\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi, \frac{14}{3}\pi, \frac{16}{3}\pi, \frac{20}{3}\pi, \frac{22}{3}\pi$

$$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

これより, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$

$$(3) |z^n + 1| = 1 \text{ より, (2)と同様にして, } \cos n\theta = -\frac{1}{2}$$

$$n\theta = \left(2k + 1 \pm \frac{1}{3}\right)\pi, \theta = \frac{1}{n}\left(2k + 1 \pm \frac{1}{3}\right)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

これらの偏角の総和を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(2k + 1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(2k + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (4k + 2) \\ &= \frac{\pi}{n} \{2(n-1)n + 2n\} = 2n\pi \end{aligned}$$

したがって, $|z^n + 1| = 1$ を満たす z をすべてかけ合わせて得られる複素数は,

$$\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1$$

[解 説]

(1)は共役複素数の利用, (2)も同じ手法で解いていたのですが, 途中で方針を変更しました。そのため, (1)から(2)および(3)への接続が悪くなっています。

6

問題のページへ

$$(1) \quad AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 2次の単位行列を E とすると, (1)より $A^2 = B^2 = E$ となる。

すると, 集合 $\{A, B\}$ から重複を許していくつか取り出し, いろいろな順番に並べて積を計算したとき, E, A, B, AB, BA 以外に得られる行列は, A と B が隣りあうものに限る, まず ABA, BAB が考えられる。

$$ABA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$BAB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = ABA$$

さらに, $ABAB$ を考えると,

$$ABAB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = BA$$

以上より, 求める行列は, E, A, B, AB, BA, ABA となるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

[解説]

A も B も, どちらも原点を通る直線に関する対称移動を表す行列です。2年後には, よく見かける問題となりそうです。