1　　解答解説のページへ

平面ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は, $|\vec{a}|^2=1$, $|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$を満たすとする。

(1)　k, l を整数とする。$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。

(2)　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$となる整数の組$(k,\ l)$をすべて求めよ。

(3)　整数の組$(k,\ l)$を条件$(k,\ l)\neq(0,\ 0)$のもとで動かすとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$の最小値を与える$(k,\ l)$をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

平面上の 3 つの曲線 C_1，C_2，C_3 を次で定める。

$$C_1 : x = \frac{15}{2}t^4,\quad y = -3t^5 + 5t^3 \quad \left(0 \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : x = \frac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right),\quad y = \frac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : x = 0,\quad y = \frac{125(t-2)}{6\left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leqq t \leqq 2\right)$$

(1)　C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2)　原点 O を出発し，C_1，C_2，C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，…，x_n と等比数列 y_0，y_1，…，y_n が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

手作りのサイコロがあり，1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6 で表す。ここで

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1,\ p_1 = p_6,\ p_2 = p_5,\ p_3 = p_4$$

が成り立つとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

(1)　$Q(5)$ を p_1，p_2 で表せ。

(2)　$p_3 = \dfrac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。$Q(7)$ がとり得る最大の値は何か。また，そのときの p_1，p_2 を求めよ。

5

解答解説のページへ

z を絶対値が 1 の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ。

(2)　$z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ。

(3)　n を自然数とする。$z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。

6

解答解説のページへ

2 次の正方行列 A, B を次で定める。

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(1)　積 AA, BB, AB, BA を計算せよ。

(2)　集合 $\{A,\ B\}$ から重複を許していくつか取り出し，いろいろな順番に並べて積を計算する。このようにして得られる行列をすべて求めよ。