1

問題のページへ

(1)　$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$より，

$$\alpha\delta-\beta\gamma=(a^2+bc)(bc+d^2)-(ac+cd)(ab+bd)=(ad-bc)^2\geqq 0$$

(2)　$A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2 \end{pmatrix}$，$A^4=E$より，

$\alpha^2+\beta\gamma=1$……①，$\beta(\alpha+\delta)=0$……②

$\gamma(\alpha+\delta)=0$……③，$\beta\gamma+\delta^2=1$……④

(i)　$\alpha+\delta=0$のとき　①から$\alpha(-\delta)+\beta\gamma=1$，$\alpha\delta-\beta\gamma=-1$，(1)より不適である。

(ii)　$\alpha+\delta\neq 0$のとき　②③から$\beta=\gamma=0$，①から$\alpha=\pm 1$，④から$\delta=\pm 1$

$\alpha+\delta\neq 0$より，$(\alpha,\ \delta)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

(i)(ii)より，$A^2=E$または$A^2=-E$となる。

(3)　$A^2=-E$より，$a^2+bc=-1$……⑤，$b(a+d)=0$……⑥

$c(a+d)=0$……⑦，$bc+d^2=-1$……⑧

$BA=-AB$より，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$となり，

$c=-b$……⑨，$d=-a$……⑩

まず，⑩より⑥と⑦は満たされており，⑧は⑤と一致する。⑨⑩を⑤に代入すると，$a^2-b^2=-1$，$b=\pm\sqrt{a^2+1}$，⑨より$c=-b=\mp\sqrt{a^2+1}$（複号同順）となる。

さて，$1\leqq m\leqq 3$，$1\leqq n\leqq 3$を満たす整数$m,\ n$に対して，

(i)　$(m,\ n)=(1,\ 1)$のとき　$A^mBA^n=ABA=-AAB=B$

(ii)　$(m,\ n)=(1,\ 2)$のとき　$A^mBA^n=ABA^2=-AB$

(iii)　$(m,\ n)=(1,\ 3)$のとき　$A^mBA^n=ABA^3=-ABA=-B$

(iv)　$(m,\ n)=(2,\ 1)$のとき　$A^mBA^n=A^2BA=-BA=AB$

(v)　$(m,\ n)=(2,\ 2)$のとき　$A^mBA^n=A^2BA^2=B$

(vi)　$(m,\ n)=(2,\ 3)$のとき　$A^mBA^n=A^2BA^3=-B(-A)=-AB$

(vii)　$(m,\ n)=(3,\ 1)$のとき　$A^mBA^n=A^3BA=-ABA=-B$

(viii)　$(m,\ n)=(3,\ 2)$のとき　$A^mBA^n=A^3BA^2=-A(-B)=AB$

(ix)　$(m,\ n)=(3,\ 3)$のとき　$A^mBA^n=A^3BA^3=-AB(-A)=B$

以上より，$(m,\ n)=(2,\ 1),\ (3,\ 2)$のとき，$AB=A^mBA^n$が成立する。

[解　説]

何の工夫もせずに，成分計算だけで解きました。(3)も，すべてを考えても 9 通りの場合分けにすぎませんので，実戦的な解法で記述しています。

2

問題のページへ

(1) $t^3=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta\sin^2\theta+3\sqrt{3}\sin^3\theta$

$=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta(1-\cos^2\theta)+3\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos^2\theta)$

$=-8\cos^3\theta+9\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta=-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta$

3 倍角の公式より，$t^3=-2\cos 3\theta+3t$ となり，$\cos 3\theta=\dfrac{-t^3+3t}{2}$ である。

(2) $t^2=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta$

$=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin 2\theta+3\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+2$

これより，$\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=-t^2+2$

すると，$y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

$=-4\cdot\dfrac{-t^3+3t}{2}-t^2+2+2t=2t^3-t^2-4t+2$

(3) $t=2\sin(\theta+30^\circ)$ と合成すると，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ から $30^\circ\leqq\theta+30^\circ\leqq210^\circ$ となり，$-1\leqq t\leqq 2$ である。

(2)より，$y'=6t^2-2t-4$

$=2(3t+2)(t-1)$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	$\frac{98}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

右表より，$t=2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2\sin(\theta+30^\circ)=2$ より，$\theta+30^\circ=90^\circ$ すなわち $\theta=60^\circ$ である。

また，$t=1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2\sin(\theta+30^\circ)=1$ より，$\theta+30^\circ=30^\circ,\ 150^\circ$ すなわち $\theta=0^\circ,\ 120^\circ$ である。

[解 説]

(1)は，3 倍角の公式が関係するようなので，とりあえず t の 3 乗を計算しました。すると，予測した通りでした。

3

問題のページへ

(1)　$0 < a_n < 2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 1$ のとき　$a_1 = c$　$(0 < c < 2)$ より成立する。

(ii)　$n = k$ のとき　$0 < a_k < 2$ が成立すると仮定する。

ここで，$f(a_k) = 4a_k - a_k{}^2 = -(a_k - 2)^2 + 4$ で，$0 < a_k < 2$ より，$0 < f(a_k) < 4$ すなわち $0 < \sqrt{f(a_k)} < 2$ となる。よって，$0 < a_{k+1} < 2$ が成立する。

(i)(ii)より，$0 < a_n < 2$ が成立する。

また，$a_{n+1} - a_n = \sqrt{4a_n - a_n{}^2} - a_n = \dfrac{4a_n - a_n{}^2 - a_n{}^2}{\sqrt{4a_n - a_n{}^2} + a_n} = \dfrac{2a_n(2 - a_n)}{\sqrt{4a_n - a_n{}^2} + a_n} > 0$

よって，$a_n < a_{n+1}$ が成立する。

(2)　まず，$2 - a_{n+1} = 2 - \sqrt{4a_n - a_n{}^2} = \dfrac{4 - (4a_n - a_n{}^2)}{2 + \sqrt{4a_n - a_n{}^2}} = \dfrac{2 - a_n}{2 + \sqrt{4a_n - a_n{}^2}}(2 - a_n)$

ここで，$c = a_1 \leqq a_n$ より $0 < 2 - a_n \leqq 2 - c$，また $2 + \sqrt{4a_n - a_n{}^2} > 2$ なので，

$$0 < \frac{2 - a_n}{2 + \sqrt{4a_n - a_n{}^2}} < \frac{2 - c}{2}$$

よって，$2 - a_{n+1} < \dfrac{2 - c}{2}(2 - a_n)$ となる。

(3)　(2)より，$0 < 2 - a_n \leqq (2 - a_1)\left(\dfrac{2 - c}{2}\right)^{n-1}$　（等号は $n = 1$ のとき成立）

$0 < \dfrac{2 - c}{2} < 1$ より，$n \to \infty$ のとき $\left(\dfrac{2 - c}{2}\right)^{n-1} \to 0$ となるので，$2 - a_n \to 0$

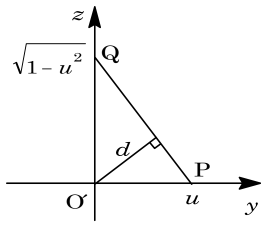
よって，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 2$

[解 説]

毎年，出題を見かける有名問題です。誘導も詳しいので，解の道筋は明快です。

4

問題のページへ



(1)　平面$x=u$上で考えて，点$\mathrm{O}'(u,\ 0,\ 0)$と線分 PQ との距離をdとすると，

$$\mathrm{PQ}\times d=\mathrm{O'P}\times\mathrm{O'Q}$$

$\mathrm{PQ}=\sqrt{u^2+(1-u^2)}=1$より，$d=u\sqrt{1-u^2}$

(2)　曲面Sをx軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を，平面$x=u$で切断したときの切り口は，線分 PQ をx軸のまわりに回転させて得られるドーナツ状の図形である。その面積を$S(u)$とおく。

さて，$u\leqq\sqrt{1-u^2}$とすると，$0\leqq u\leqq 1$から$u^2\leqq\dfrac{1}{2}$なので，$0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となる。

また，$u\geqq\sqrt{1-u^2}$とすると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$である。

(i)　$0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき

$$S(u)=\pi\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2-\pi d^2=\pi\left\{1-u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi(1-2u^2+u^4)$$

(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$のとき

$$S(u)=\pi u^2-\pi d^2=\pi\left\{u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi u^4$$

(i)(ii)より，求める立体の体積をVとすると，

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-2u^2+u^4)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi u^4\,du$$

$$=\pi\left[u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{1}{5}u^5\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{5}\right)\pi$$

[解 説]

頻出有名問題の 1 つです。ドーナツ状の切り口の外径が，O′P か O′Q かで場合分けをします。

5

問題のページへ

まず，3 点1，α，α^2が異なることより，$\alpha\neq 1$，$\alpha^2\neq\alpha$，$\alpha^2\neq 1$なので，$\alpha\neq\pm 1$，$\alpha\neq 0$である。このとき，kを実数として，中心が点kである円C上に3点1，α，α^2があるとすると，$|k-1|=|k-\alpha|=|k-\alpha^2|$である。

$|k-1|=|k-\alpha|$より，$(k-1)^2=(k-\alpha)(k-\overline{\alpha})$

$$k^2-2k+1=k^2-(\alpha+\overline{\alpha})k+\alpha\overline{\alpha},\ (\alpha+\overline{\alpha}-2)k=|\alpha|^2-1\cdots\cdots\cdots①$$

$|k-1|=|k-\alpha^2|$より，$(k-1)^2=(k-\alpha^2)(k-\overline{\alpha}^2)$

$$k^2-2k+1=k^2-(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)k+\alpha^2\overline{\alpha}^2,\ (\alpha^2+\overline{\alpha}^2-2)k=|\alpha|^4-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\alpha+\overline{\alpha}-2=0$のときは，①より$|\alpha|^2-1=0$となる。すなわち，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$かつ$|\alpha|=1$であるので，$\alpha=1$となる。

ところが，これは$\alpha\neq 1$に反し，$\alpha+\overline{\alpha}-2\neq 0$から$k=\dfrac{|\alpha|^2-1}{\alpha+\overline{\alpha}-2}$である。

②に代入して，$(\alpha^2+\overline{\alpha}^2-2)(|\alpha|^2-1)=(|\alpha|^4-1)(\alpha+\overline{\alpha}-2)$

$$(|\alpha|^2-1)\{(\alpha^2+\overline{\alpha}^2-2)-(|\alpha|^2+1)(\alpha+\overline{\alpha}-2)\}=0$$

$$(|\alpha|^2-1)\{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2|\alpha|^2-2-(\alpha+\overline{\alpha}-2)|\alpha|^2-(\alpha+\overline{\alpha})+2\}=0$$

$$(|\alpha|^2-1)(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha+\overline{\alpha}-|\alpha|^2-1)=0,\ (|\alpha|^2-1)(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)=0$$

$\alpha\neq 1$より$(|\alpha|^2-1)(\alpha+\overline{\alpha})=0$，すなわち$|\alpha|^2-1=0$または$\alpha+\overline{\alpha}=0$となる。

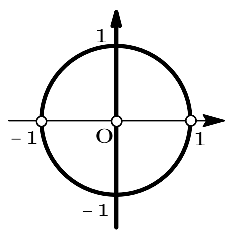
(i)　$|\alpha|^2-1=0$のとき

$|\alpha|=1$より，点αは原点中心で半径 1 の円周上に存在する。ただし，$\alpha\neq\pm 1$である。このとき$k=0$より，円Cの半径は$|k-1|=1$である。

(ii)　$\alpha+\overline{\alpha}=0$のとき

$\overline{\alpha}=-\alpha$より，点$\alpha$は虚軸上に存在する。ただし，$\alpha\neq 0$である。このとき，$k=\dfrac{|\alpha|^2-1}{-2}$より，円$C$の半径は，

$$|k-1|=\left|\frac{|\alpha|^2-1}{-2}-1\right|=\left|\frac{|\alpha|^2+1}{-2}\right|=\frac{|\alpha|^2+1}{2}$$



(i)(ii)より，αの存在する範囲は右図の太線部となる。ただし，原点および点± 1は除く。

円Cの半径は，(i)(ii)の場合を合わせて，$\dfrac{|\alpha|^2+1}{2}$である。

[解 説]

複素数平面上の図形が題材ですが，ポイントは①②式をまとめる計算です。

6

問題のページへ

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=(x+1)\log\dfrac{x+1}{x}=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x(x+1)+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{.1}{x^2(x+1)}>0$$

これより，$f'(x)$ は単調増加関数であり，

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right\}=0$$

よって, $x>0$ のとき $f'(x)<0$ となるので，$f(x)$ は単調減少関数である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(x+1)\log\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to+0}(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\log e=1$$

(3)　$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-2=\left(\dfrac{1}{e^2}+1\right)\log(1+e^2)-\log e^2=\dfrac{1}{e^2}\{(1+e^2)\log(1+e^2)-e^2\log e^2\}$

ここで，$g(x)=x\log x\ (x>1)$ とおくと，$g'(x)=\log x+1>0$ から，

$$g(1+e^2)>g(e^2)$$

すると，$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-2>0$ より，$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)>2$ ………①

また，$f(1)-2=2\log 2-2=\log 4-\log e^2<0$ から，$f(1)<2$ ………②

①②より，$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)>2>f(1)$

よって, (1)から，$\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲に，$f(x)=2$ を満たす x が存在する。

[解　説]

微分の応用についての基本問題です。誘導が非常にていねいです。