1

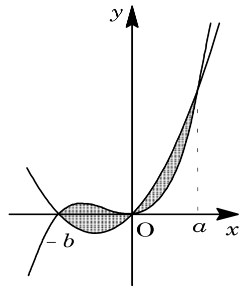
問題のページへ

(1)　$y = x^3 + bx^2$ ………①，$y = ax^2 + abx$ ………②

①②の共有点は，$x^3 + bx^2 = ax^2 + abx$

$x^3 + (b-a)x^2 - abx = 0$

$x(x-a)(x+b) = 0$ より，$x = 0,\ a,\ -b$



右図より，$-b \leqq x \leqq 0$ では①の曲線が②の曲線の上方にあり, $0 \leqq x \leqq a$ では②の曲線が①の曲線の上方にある。

よって，①と②の曲線によって囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{-b}^{0} \{x^3 + (b-a)x^2 - abx\}dx + \int_0^a -\{x^3 + (b-a)x^2 - abx\}dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{b-a}{3}x^3 - \frac{ab}{2}x^2\right]_{-b}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{b-a}{3}x^3 - \frac{ab}{2}x^2\right]_0^a$$

$$= -\left(\frac{b^4}{4} - \frac{b-a}{3}b^3 - \frac{ab}{2}b^2\right) - \left(\frac{a^4}{4} + \frac{b-a}{3}a^3 - \frac{ab}{2}a^2\right)$$

$$= \frac{b^4}{12} + \frac{ab^3}{6} + \frac{a^3b}{6} + \frac{a^4}{12} = \frac{1}{12}(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)$$

(2)　$a > 0,\ b > 0,\ a + b = 1$ より, $0 < a < 1$ なので,

$$S = \frac{1}{12}\{a^4 + 2a^3(1-a) + 2a(1-a)^3 + (1-a)^4\}$$

$$S' = \frac{1}{12}\{4a^3 + 6a^2(1-a) - 2a^3 + 2(1-a)^3 - 6a(1-a)^2 - 4(1-a)^3\}$$

$$= -\frac{1}{6}(4a^3 - 6a^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{6}(2a-1)(2a^2 - 2a - 1)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$\frac{1}{32}$	$\nearrow$	

$0 < a < 1$ で $2a^2 - 2a - 1 < 0$ より，S の増減は右表のようになる。

よって，$a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{1}{32}$ をとる。

[解 説]

(1), (2)とも，さしたる工夫もせず，普通に解いてみました。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ より，$f'(x)=\dfrac{x-(1+2x)+\sqrt{1+2x}}{x^2\sqrt{1+2x}}=\dfrac{-x-1+\sqrt{1+2x}}{x^2\sqrt{1+2x}}$

$$a=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)-1}{x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+1)^2+1+2x}{x^2\sqrt{1+2x}\,(x+1+\sqrt{1+2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}\,(x+1+\sqrt{1+2x})}=-\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より，$-\dfrac{1}{2}\leqq x$ の範囲で，$\sqrt{1+2x}$，$1+x$，$1+x-\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，

$$(1+x)-\left(1+x-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\geqq 0$$

$$(1+x)-\sqrt{1+2x}=\frac{(1+x)^2-(1+2x)}{(1+x)+\sqrt{1+2x}}=\frac{x^2}{(1+x)+\sqrt{1+2x}}\geqq 0$$

なお，等号はともに $x=0$ のとき成立する。

さて，$g(x)=\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}+1=\frac{\sqrt{(1+2x)^3}-1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g''(x)$		$-$	0	$+$
$g'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$+$
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$

右表より，$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ のとき $g(x)<0$，$x=0$ のとき $g(x)=0$，$x>0$ のとき $g(x)>0$ となる。

以上より，$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ のとき

$$\sqrt{1+2x}<1+x-\frac{1}{2}x^2<1+x$$

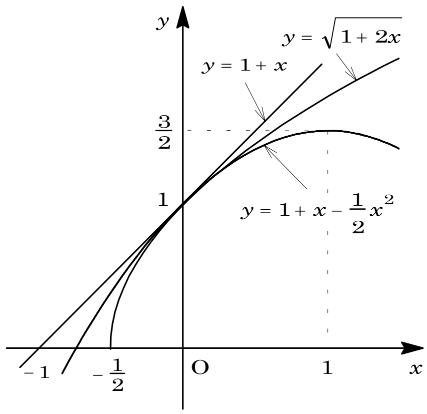
$x=0$ のとき

$$\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{1}{2}x^2=1+x$$

$x>0$ のとき

$$1+x-\frac{1}{2}x^2<\sqrt{1+2x}<1+x$$

また，グラフは右図のようになる。



[解 説]

(2)はグラフがすぐ書けるので，大小関係は直観的にわかりますが，きちんと示そうとすると，時間がかかります。

3

問題のページへ

1 から 199 までの奇数を，同じ得点となる数の個数によって場合分けをする。なお，それぞれの場合に適する奇数を n とする。

(i)　同じ得点になる数がその数だけの奇数

$100<n\leqq 200$ より，$n=101,\ 103,\ 105,\ \cdots,\ 199$ となる。

(ii)　同じ得点になる数が 2 個ある奇数

$100<2n\leqq 200$ より，$n=51,\ 53,\ 55,\ \cdots,\ 99$ となる。

(iii)　同じ得点になる数が 3 個ある奇数

$100<4n\leqq 200$ より，$n=27,\ 29,\ 31,\ \cdots,\ 49$ となる。

(iv)　同じ得点になる数が 4 個ある奇数

$100<8n\leqq 200$ より，$n=13,\ 15,\ 17,\ \cdots,\ 25$ となる。

(v)　同じ得点になる数が 5 個ある奇数

$100<16n\leqq 200$ より，$n=7,\ 9,\ 11$ となる。

(vi)　同じ得点になる数が 6 個ある奇数　$100<32n\leqq 200$ より，$n=5$ だけである。

(vii)　同じ得点になる数が 7 個ある奇数　$100<64n\leqq 200$ より，$n=3$ だけである。

(viii)　同じ得点になる数が 8 個ある奇数　$100<128n\leqq 200$ より，$n=1$ だけである。

以上より，求める期待値 E は，

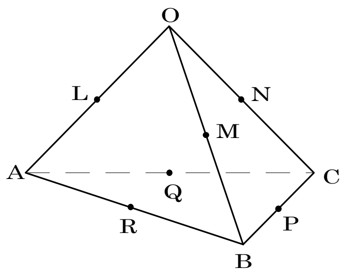
$$
\begin{aligned}
E &= (101+\cdots+199)\times\frac{1}{200}+(51+\cdots+99)\times\frac{2}{200}+(27+\cdots+49)\times\frac{3}{200}\\
&\quad+(13+\cdots+25)\times\frac{4}{200}+(7+9+11)\times\frac{5}{200}+5\times\frac{6}{200}+3\times\frac{7}{200}+1\times\frac{8}{200}\\
&=7500\times\frac{1}{200}+1875\times\frac{2}{200}+456\times\frac{3}{200}+133\times\frac{4}{200}+27\times\frac{5}{200}+5\times\frac{6}{200}\\
&\quad+3\times\frac{7}{200}+1\times\frac{8}{200}=\frac{13344}{200}=\frac{1668}{25}
\end{aligned}
$$

[解 説]

200 を半分にして，またその半分というように，大きい方から考えて解きました。

4

問題のページへ



(1)　線分 LP の中点を S とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

これから, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ, 点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので, S は線分 NR の中点にも一致する。

よって, 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

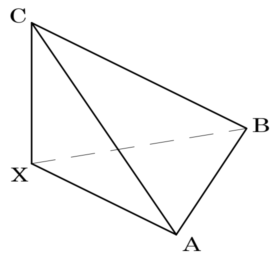
(2)　条件より, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ ………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$, ①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$, ①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3)　条件より, $\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$



$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$

$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ が互いに直交することより, 四面体 XABC の体積は,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\right)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ より, L から平面 ABC の下ろした垂線の長さと, X から平面 ABC の下ろした垂線の長さは等しいので, 四面体 XABC の体積と四面体 LABC の体積は等しい。

すると, L は OA の中点から, 四面体 OABC の体積は, 四面体 XABC の 2 倍となり, $\frac{1}{3}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$ である。

[解 説]

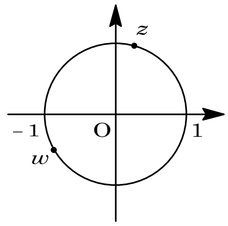
(3)で与えられた条件によって, 四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき, この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。ずいぶん前になりますが, 1993 年に東大・理で, この考え方を利用する問題が出ています。

5

問題のページへ

$z=x+yi$, $w=u+vi$ に対して，$|z|=|w|=1$ より，

$$x^2+y^2=u^2+v^2=1\ \cdots\cdots\cdots①$$



また，$1+z+w=(1+x+u)+(y+v)i$ なので，$|1+z+w|<1$ より，

$$(1+x+u)^2+(y+v)^2<1\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，条件が z と w に関して対等なので，一般性を失うことなく，$yv<0$ から $y>0$, $v<0$ とすることができ，

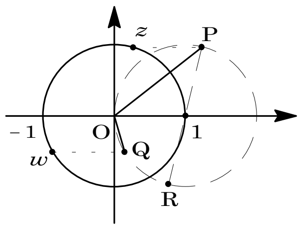
$$-1<x<1,\ \ -1<u<1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$1+x^2+u^2+2x+2u+2xu+y^2+v^2+2yv<1$

①を代入すると，$1+x+u+xu+yv<0$

$$(1+x)(1+u)+yv<0\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\mathrm{P}(1+z)$，$\mathrm{Q}(1+w)$ とおくと，④は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}<0$ を意味するので，$\angle\mathrm{POQ}>90^\circ$ ……⑤となる。



さて，点 P を点 1 に関して対称移動した点を R とおくと，$\mathrm{R}(1-z)$ となり，$\angle\mathrm{POR}=90^\circ$ である。

すると，$1-z=1-x-yi$ から，⑤の条件は，$1+u<1-x$

$$x+u<0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

以上より，求める条件は，③⑥から，$-1<x<1$，$-1<u<1$，$x+u<0$

[解　説]

④の左辺を内積とみて，後半は図形的に考えました。

6

問題のページへ

(1)　n が自然数のとき，$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ $(t \geqq 0)$ を数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f(t)=e^t-t$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$

$t \geqq 0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ より $f(t) \geqq f(0)=1>0$ となり，$e^t>t$ が成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$e^t > \dfrac{t^k}{k!}$ $(t \geqq 0)$ が成立するとし，$g(t)=e^t-\dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ とおく。

$$g'(t)=e^t-\frac{(k+1)t^k}{(k+1)!}=e^t-\frac{t^k}{k!}$$

$t \geqq 0$ のとき，$g'(t)>0$ より $g(t)>g(0)=1>0$ となり，$e^t > \dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ が成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ $(t \geqq 0)$ が成立する。

(2)　$a_m=\displaystyle\int_0^t x^m e^{-x}dx$ とおくと，$a_0=\displaystyle\int_0^t e^{-x}dx=1-e^{-t}$ より，$I_0=\displaystyle\lim_{t\to\infty}a_0=1$

$$a_m=-\Big[x^m e^{-x}\Big]_0^t+\int_0^t mx^{m-1}e^{-x}dx=-t^m e^{-t}+ma_{m-1}\ (m \geqq 1)$$

さらに，$b_m=e^t a_m$ とおくと，$b_m=mb_{m-1}-t^m$ となり，$\dfrac{b_m}{m!}=\dfrac{b_{m-1}}{(m-1)!}-\dfrac{t^m}{m!}$

$$\frac{b_m}{m!}=\frac{b_0}{0!}-\Big(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^m}{m!}\Big)=e^t-1-\Big(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^m}{m!}\Big)$$

$$b_m=m!(e^t-1)-m!\Big(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^m}{m!}\Big)$$

$$a_m=\frac{m!}{e^t}(e^t-1)-\frac{m!}{e^t}\Big(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^m}{m!}\Big)=m!(1-e^{-t})-m!\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t}$$

(1)より, $t \geqq 0$ で，$e^t > \dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ より，$0 \leqq \dfrac{1}{k!}\cdot\dfrac{t^k}{e^t} < \dfrac{1}{k!}t^k\cdot\dfrac{(k+1)!}{t^{k+1}}=\dfrac{k+1}{t}$

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t} < \sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{t}=\frac{(m+3)m}{2t}$$

$t\to\infty$ のとき，$\dfrac{(m+3)m}{2t}\to 0$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t}\to 0$

よって，$I_m=\displaystyle\lim_{t\to\infty}a_m=\lim_{t\to\infty}\Big\{m!(1-e^{-t})-m!\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t}\Big\}=m!\ (m \geqq 1)$

これは，$m=0$ のときも満たしている。

[解 説]

どんな自然数 n に対しても $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ となりますが，この証明を一度はやっていないと, (2)で, (1)の不等式の $n=k+1$ の場合を考えつくのは，難しいでしょう。