1

問題のページへ

(1) ハミルトン・ケーリーの定理より，$K^2-E=O$，$K^2=E$

また，$E^2=E$，$EK=KE=K$ より，

$$(aE+bK)^2=a^2E+2abK+b^2E=(a^2+b^2)E+2abK$$

条件より，$(a^2+b^2)E+2abK=pE+qK$

$$(a^2+b^2-p)E+(2ab-q)K=O\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$2ab-q\neq0$ とすると，$K=-\dfrac{a^2+b^2-p}{2ab-q}E$ となり不適。

よって，$2ab-q=0$，①より $a^2+b^2-p=0$

$$p=a^2+b^2,\ q=2ab\cdots\cdots\cdots②$$

②を満たす実数 a, b が存在する条件は，$(a+b)^2=p+q$ とまとめて，

$$a+b=\pm\sqrt{p+q}\ (p+q\geqq0),\ ab=\frac{q}{2}$$

すると, a, b は 2 次方程式 $t^2\mp\sqrt{p+q}\,t+\dfrac{q}{2}=0$ の 2 つの解となることより,

$$D=(p+q)-4\cdot\frac{q}{2}\geqq0,\ p-q\geqq0$$

以上より，求める条件は，$p+q\geqq0$，$p-q\geqq0$

(2) $(aE+bK)^2=pE+qK$ から, (1)より $p+q\geqq0$，$p-q\geqq0\cdots\cdots\cdots③$

$(cE+dK)^2=qE-pK$ から, (1)より $q-p\geqq0$，$q+p\geqq0\cdots\cdots\cdots④$

③④をまとめると，$q\geqq-p$，$p\geqq q$，$q\geqq p$ となるので,

$$q\geqq-p\cdots\cdots⑤,\ p=q\cdots\cdots⑥$$

また条件より，$p^2+q^2=2\cdots\cdots\cdots⑦$

⑤⑥⑦より，$(p,\ q)=(1,\ 1)$

[解 説]

見かけ上, 行列の問題ですが, それは①式までです。E と K が 1 次独立であることを用いた後は式計算となります。

2

問題のページへ

$|\alpha+\beta|=k\ (0\leqq k<2)$，$|\alpha|+|\beta|=l$ とおくと，$f(x)=\dfrac{1}{4}k^2x^2-lx+1$ となる。

(i)　$k=0\ (|\alpha+\beta|=0)$ のとき

$f(x)=-lx+1$ となり，$l\geqq 0$ なので，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

$$f(1)=-l+1=-|\alpha|-|\beta|+1$$

(ii)　$0<k<2\ (0<|\alpha+\beta|<2)$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{4}k^2\left(x-\frac{2l}{k^2}\right)^2-\frac{l^2}{k^2}+1$$

ここで，$\dfrac{2l}{k^2}-1=\dfrac{1}{k^2}(2l-k^2)=\dfrac{1}{k^2}\left\{2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\right\}$

さて，複素数α，βに対して，$|\alpha|+|\beta|\geqq|\alpha+\beta|$ が成り立つので，

$$2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\geqq 2|\alpha+\beta|-|\alpha+\beta|^2=2k-k^2=-(k-1)^2+1$$

$0<k<2$ において，$-(k-1)^2+1>0$ なので，$\dfrac{2l}{k^2}-1>0$，$\dfrac{2l}{k^2}>1$

すると，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

$$f(1)=\frac{1}{4}k^2-l+1=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は，$f(1)=\dfrac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$

[解 説]

(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは，条件の $|\alpha+\beta|<2$ の意味が不明です。ここは $|\alpha|+|\beta|$ と $|\alpha+\beta|$ の関係がポイントとなりますが，その両者をつなぐのは，どう考えても三角不等式しかありません。なお，昨年，東大・理で，この不等式を利用する問題が出ています。

3

問題のページへ

(1) $y=f(x)$として，$c\neq 0$のとき，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$，$cy-a=\dfrac{bc-ad}{cx+d}$

$ad-bc\neq 0$より，$cx+d=\dfrac{bc-ad}{cy-a}$，$x=-\dfrac{d}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cy-a)}=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$ ………①

また，$c=0$のとき，$y=\dfrac{ax+b}{d}$，$dy=ax+b$

$ad-bc\neq 0$から$a\neq 0$なので，$x=\dfrac{dy-b}{a}$となり，この式は①において$c=0$とした式と一致する。

以上より，$f^{-1}(y)=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$となり，$f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

(2) $f^{-1}(x)=f(x)$より，$\dfrac{-dx+b}{cx-a}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$(ax+b)(cx-a)+(dx-b)(cx+d)=0$$

$$c(a+d)x^2-(a^2-d^2)x-b(a+d)=0$$

まとめて，$(a+d)\{cx^2-(a-d)x-b\}=0$ ………②

$f(x)\neq x$より$\dfrac{ax+b}{cx+d}\neq x$，まとめて，$cx^2-(a-d)x-b\neq 0$ ………③

②③より求める条件は，$a+d=0$

(3) $f(f(x))=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\dfrac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)}=\dfrac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$f^{-1}(x)=f(f(x))$より，$\dfrac{-dx+b}{cx-a}=\dfrac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$$\{(a^2+bc)x+b(a+d)\}(cx-a)+(dx-b)\{c(a+d)x+(bc+d^2)\}=0$$

$$c(a^2+bc+ad+d^2)x^2-(a^3-d^3-bcd+abc)x-b(a^2+bc+ad+d^2)=0$$

まとめて，$(a^2+ad+bc+d^2)\{cx^2-(a-d)x-b\}=0$ ………④

$f(x)\neq x$より③が成り立つので，④と合わせると求める条件は,

$$a^2+ad+bc+d^2=0$$

[解 説]

2×2 行列の積との対応で，過去にも類題が出ています。しかし，本問では，$f(x)=x$のとき$f^{-1}(x)=f(x)$，$f^{-1}(x)=f(f(x))$がともに成立し，それに気付くのが鍵です。

4

問題のページへ

1 が a 回, 2 または 3 が b 回, 4 が c 回, 5 または 6 が d 回出たとすると，条件より,

$$a+b+c+d=5\cdots\cdots\cdots①,\ \ a+2b-c-2d=0\cdots\cdots\cdots②$$

①×2＋②より，$3a+4b+c=10\cdots\cdots\cdots③$

$a\geqq0$, $c\geqq0$ なので $4b\leqq10$ となり, b は 0 以上の整数より，$b=0,\ 1,\ 2$

(i)　$b=0$ のとき　③より $3a+c=10$

①より $0\leqq a+c\leqq5$ なので，$(a,\ c)=(3,\ 1)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 1,\ 1)$ となり，②を満たす。

(ii)　$b=1$ のとき　③より $3a+c=6$

①より $0\leqq a+c\leqq4$ なので，$(a,\ c)=(2,\ 0),\ (1,\ 3)$

$(a,\ c)=(2,\ 0)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0,\ 2)$ となり，②を満たす。

$(a,\ c)=(1,\ 3)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$ となり，②を満たす。

(iii)　$b=2$ のとき　③より $3a+c=2$

①より $0\leqq a+c\leqq3$ なので，$(a,\ c)=(0,\ 2)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 2,\ 1)$ となり，②を満たす。

(i)(ii)(iii)より, 5 回振った後に点 A が原点にあるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が,

$$(3,\ 0,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 0,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3,\ 0),\ (0,\ 2,\ 2,\ 1)$$

求める確率は，これらの場合の和となり,

$$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}$$

$$=\frac{20}{3\cdot6^4}+\frac{30}{3^3\cdot6^2}+\frac{20}{3\cdot6^4}+\frac{30}{3^3\cdot6^2}=\frac{70}{3^3\cdot6^2}=\frac{35}{486}$$

[解 説]

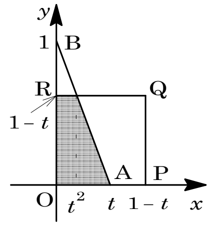
ランダムウォークを題材とした頻出問題です。5 回移動するだけですので，場合分けの数もそんなに多くはありません。

5

問題のページへ

まず，直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{1}{t}x+1$ となる。

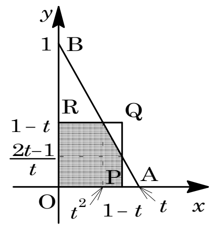
直線 AB と $x=1-t$ との交点は，$y=-\dfrac{1-t}{t}+1=\dfrac{2t-1}{t}$ であり，$0\leqq\dfrac{2t-1}{t}\leqq 1-t$ とすると $1\leqq 2t$ かつ $t^2+t-1\leqq 0$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。



$0<t<1$ と合わせて，$\dfrac{1}{2}\leqq t<1$

また，$y=1-t$ との交点は，$1-t=-\dfrac{1}{t}x+1$ より $x=t^2$ であり，$0\leqq t^2\leqq 1-t$ とすると $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

$0<t<1$ と合わせて $0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

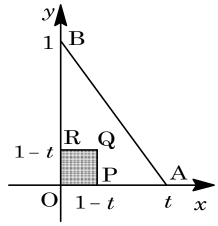


(i)　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t-\frac{1}{2}t^2\left\{1-(1-t)\right\}=-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t-\frac{1}{2}t^2\left\{1-(1-t)\right\}-\frac{1}{2}\left\{1-(1-t)\right\}\cdot\frac{2t-1}{t}$$
$$=-\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+2-\frac{1}{2t}$$



(iii)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq t<1$ のとき　$S=(1-t)^2$

さて，$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$S'=-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(3t^2-1)>0$ となり, S は単調に増加する。

また，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$S'=-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2t^2}=-\dfrac{3t^4+3t^2-1}{2t^2}$

$S'=0$ とすると $t^2=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$ となり，ここで $\alpha=\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}}$ とおくと，

$$\alpha^2-\frac{1}{4}=\frac{-3+\sqrt{21}}{6}-\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{21}-9}{12}>0$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\alpha^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}-\frac{-3+\sqrt{21}}{6}=\frac{12-3\sqrt{5}-\sqrt{21}}{6}$$
$$>\frac{12-3\sqrt{5}-5}{6}=\frac{7-3\sqrt{5}}{6}>0$$

よって，$\dfrac{1}{4}<\alpha^2<\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ より，

$$\frac{1}{2}<\alpha<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

すると, S の増減は右表のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

さらに，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq t<1$ のとき，$S'=-2(1-t)<0$ となり, S は単調に減少する。

以上より, S は連続的に変化するので，$t=\alpha=\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}}$ のとき最大となる。

[解 説]

難問というわけではありませんが，詰めの部分の計算が繁雑な問題です。

6　問題のページへ

(1)　条件より，$\alpha_n=\dfrac{4}{5}\cdot 2^{n-1}=\dfrac{1}{5}\cdot 2^{n+1}$

$\alpha_1=\dfrac{4}{5}$ より $[\,\alpha_1\,]=0$ となり，小数部分は $\dfrac{4}{5}$

$\alpha_2=\dfrac{8}{5}$ より $[\,\alpha_2\,]=1$ となり，小数部分は $\dfrac{8}{5}-1=\dfrac{3}{5}$

$\alpha_3=\dfrac{16}{5}$ より $[\,\alpha_3\,]=3$ となり，小数部分は $\dfrac{16}{5}-3=\dfrac{1}{5}$

$\alpha_4=\dfrac{32}{5}$ より $[\,\alpha_4\,]=6$ となり，小数部分は $\dfrac{32}{5}-6=\dfrac{2}{5}$

$\alpha_5=\dfrac{64}{5}$ より $[\,\alpha_5\,]=12$ となり，小数部分は $\dfrac{64}{5}-12=\dfrac{4}{5}$

(2)　$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ として，$\dfrac{k}{5}\times 2^4=\dfrac{16}{5}k=3k+\dfrac{k}{5}$ となるので，α_n の小数部分と α_{n+4} の小数部分は等しい。

したがって，α_n の小数部分は周期 4 の周期数列となり，(1)より $\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$ をくり返す。すなわち α_n の小数部分は，$m\geqq 1$ として，$n=4m-3$ のとき $\dfrac{4}{5}$，$n=4m-2$ のとき $\dfrac{3}{5}$，$n=4m-1$ のとき $\dfrac{1}{5}$，$n=4m$ のとき $\dfrac{2}{5}$ となる。

さて，条件より $\beta_n=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ なので，$\beta_1=\dfrac{1}{5}$, $n\geqq 2$ で $|\,\beta_n|\leqq\dfrac{1}{10}$ となる。

すると，$n\geqq 2$ のとき，$a_n=\alpha_n+\beta_n$ より，$\alpha_n-\dfrac{1}{10}\leqq a_n\leqq\alpha_n+\dfrac{1}{10}$ となり，しかも α_n の小数部分は $\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$ なので,

$$[\,a_n\,]=[\,\alpha_n+\beta_n\,]=[\,\alpha_n\,]$$

すなわち，a_n の小数部分 b_n は，α_n の小数部分に β_n を加えたものになる。

よって, m を $m\geqq 1$ の整数として,

$$b_n=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-3}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=4m-2\text{のとき})$$

$$b_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=4m-1\text{のとき})$$

$$b_n=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=4m\text{のとき})$$

$$b_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=4m+1\text{のとき})$$

なお，$a_1=\alpha_1+\beta_1=\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}=1$ なので，小数部分 b_1 は，$b_1=0$ となる。

(3)　まず，$c_m=b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m}+b_{4m+1}$ とおくと,

$$c_m = 2+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m}(-8+4-2+1) = 2-\left(\frac{1}{16}\right)^m$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} b_k = b_1+\sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{m=1}^{25} c_m - b_{101}$

$$= 2\times 25-\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\}}{1-\frac{1}{16}}-\left\{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}$$

$$= 50-\frac{1}{15}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\}-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

$$= 49+\frac{2}{15}-\frac{2}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

以上より，数列$\{b_n\}$の初項から第 100 項までの和の整数部分は 49 である。

[解 説]

まず(1)で周期性に気付き，次にβ_nは n が大きくなると，その絶対値がごく小さい値となり，α_nとα_nの値には，違いがほとんどないという感覚が必要です。