1

解答解説のページへ

m は実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-(m+2)x+2m+4=0$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき, m の値の範囲を求めよ。ただし, 重解の場合, 実数解の個数は 1 つと数える。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

(1) k は整数とする。$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

p は正の実数とする。関数 $f(x)$ は，すべての実数 x について $f(x+p)=f(x)$ を満たし，$0 \leqq x \leqq p$ において，$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x-\dfrac{p}{2}\right|$ であるとする。また，

$$I_k=\int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x}f(x)\,dx \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　I_1 を求めよ。

(2)　$\dfrac{I_k}{I_1}$ を求めよ。

(3)　n は自然数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{pn} e^{-x}f(x)\,dx$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

2 次の項の係数がともに正の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ について，座標平面上の放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。また，直線 $y=\frac{1}{2}x$ を l とする。C_1 と l は点 $(0,\ 0)$ で，C_2 と l は点 $(4,\ 2)$ で接し，C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{22}{9}\right)$ で交わるとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2)　放物線 C_1 の $x \geqq 0$ の部分と放物線 C_2 および直線 l によって囲まれる図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

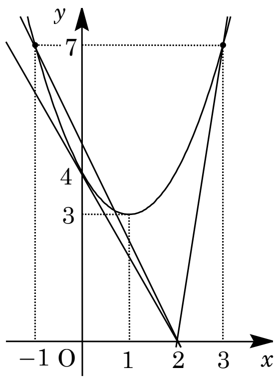
$a_1 = a_2 = 1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，次の 2 つの条件 p と q が同値であることを示せ。

p：すべての自然数 n に対して，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成り立つ。

q：すべての自然数 n に対して，${a_{n+1}}^2 - a_{n+2}\,a_n = (-1)^n$ が成り立つ。

1

問題のページへ



2 次方程式 $x^2-(m+2)x+2m+4=0$ ……①を変形し，

$$x^2-2x+4=m(x-2)$$

すると，放物線 $y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ ……②と，点 $(2,\ 0)$ を通り傾き m の直線 $y=m(x-2)$ ……③の共有点の x 座標が，①の実数解に対応する。

つまり，①の実数解が $-1\leqq x\leqq 3$ にただ 1 つという条件は，②と③の共有点が $-1\leqq x\leqq 3$ にただ 1 つあることになる。

まず，②と③のグラフが接するとき，①の判別式 D は，

$$D=(m+2)^2-4(2m+4)=0\,,\ m^2-4m-12=0\,,\ (m+2)(m-6)=0$$

ここで，$m=-2$ のとき接点は $x=\dfrac{m+2}{2}=0$，$m=6$ のとき接点は $x=\dfrac{m+2}{2}=4$

また，直線③が点 $(-1,\ 7)$ を通るとき $m=\dfrac{7}{-1-2}=-\dfrac{7}{3}$ となり，点 $(3,\ 7)$ を通るとき $m=\dfrac{7}{3-2}=7$ である。

したがって，求める m の範囲は，右上図から，$m<-\dfrac{7}{3}$，$m=-2$，$m\geqq 7$ である。

［解　説］

2 次方程式の解の配置の問題です。解答例では放物線と定点通過する直線の関係としてとらえました。なお，m を分離し，分数関数を対応させるという方法も考えられます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) 整数 k に対して $\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ のとき，$k \leqq \dfrac{x}{2} < k+1$ から，$2k \leqq x < 2k+2$ となる。

(2) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ のとき，$\left[\dfrac{x}{2}\right]=1$ から $1 \leqq \dfrac{x}{2} < 2$ となり，$2 \leqq x < 4$ ………①

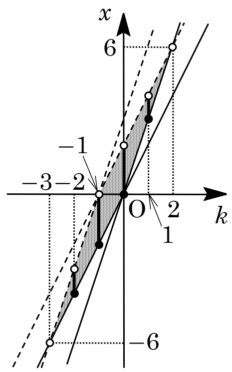
また，$\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ から $1 \leqq \dfrac{x}{3} < 2$ となり，$3 \leqq x < 6$ ………②

①②より，$3 \leqq x < 4$ である。

(3) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=k$ とおくと，$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ から $2k \leqq x < 2k+2$ ………③

また，$\left[\dfrac{x}{3}\right]=k$ から $k \leqq \dfrac{x}{3} < k+1$ となり，$3k \leqq x < 3k+3$ ………④

ここで，連立不等式③かつ④を kx 平面上に図示すると，右図の網点部となり，整数 k は $k=-2,\ -1,\ 0,\ 1$ である。



・$k=-2$ のとき　$-4 \leqq x < -2$ かつ $-6 \leqq x < -3$ から，

$-4 \leqq x < -3$

・$k=-1$ のとき　$-2 \leqq x < 0$ かつ $-3 \leqq x < 0$ から，

$-2 \leqq x < 0$

・$k=0$ のとき　$0 \leqq x < 2$ かつ $0 \leqq x < 3$ から，$0 \leqq x < 2$

・$k=1$ のとき　(2)から，$3 \leqq x < 4$

以上より，求める x の範囲は，$-4 \leqq x < -3$，$-2 \leqq x < 2$，$3 \leqq x < 4$ である。

［解 説］

ガウス記号の処理の問題です。(3)では，見通しをよくするために，連立不等式をいったん領域として図示しました。

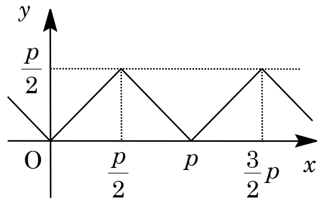
3

問題のページへ

(1)　$p>0$ のとき，$0 \leqq x \leqq p$ において，$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x-\dfrac{p}{2}\right|$ より，

(i)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{p}{2}$ のとき　$f(x)=\dfrac{p}{2}+\left(x-\dfrac{p}{2}\right)=x$

(ii)　$\dfrac{p}{2} \leqq x \leqq p$ のとき　$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)=-x+p$



また，すべての実数 x について，$f(x+p)=f(x)$

このとき，$I_k=\displaystyle\int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x}f(x)dx$ とおくと，

$$I_1=\int_0^p e^{-x}f(x)dx=\int_0^{\frac{p}{2}} xe^{-x}dx+\int_{\frac{p}{2}}^{p}(-x+p)e^{-x}dx$$

$$=-\Big[xe^{-x}\Big]_0^{\frac{p}{2}}+\int_0^{\frac{p}{2}} e^{-x}dx-\Big[(-x+p)e^{-x}\Big]_{\frac{p}{2}}^{p}-\int_{\frac{p}{2}}^{p} e^{-x}dx$$

$$=-\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}}-\Big[e^{-x}\Big]_0^{\frac{p}{2}}+\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}}+\Big[e^{-x}\Big]_{\frac{p}{2}}^{p}=-e^{-\frac{p}{2}}+1+e^{-p}-e^{-\frac{p}{2}}=\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2$$

(2)　$t=x-p(k-1)$ とおくと，$dt=dx$ で，$x=p(k-1)\to pk$ は $t=0\to p$ となり，$f(x+p)=f(x)$ から，帰納的に $f(x+p(k-1))=f(x)$ となるので，

$$I_k=\int_0^p e^{-t-p(k-1)}f(t+p(k-1))dt=e^{-p(k-1)}\int_0^p e^{-t}f(t)dt=e^{-p(k-1)}I_1$$

よって，$\dfrac{I_k}{I_1}=e^{-p(k-1)}$ である。

(3)　$J_n=\displaystyle\int_0^{pn} e^{-x}f(x)dx$ とおくと，(1)(2)より，

$$J_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}I_k=I_1\sum_{k=1}^{n}e^{-p(k-1)}=\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2\cdot\frac{1-e^{-pn}}{1-e^{-p}}$$

$n\to\infty$ のとき，$e^{-pn}\to 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}J_n=\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{1-e^{-p}}=\frac{\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2}{\left(1+e^{-\frac{p}{2}}\right)\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)}=\frac{1-e^{-\frac{p}{2}}}{1+e^{-\frac{p}{2}}}$$

［解　説］

周期関数を題材にした定積分の問題です。さらに，無限級数との融合も問われている頻出題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，$g(x)=px^2+qx+r\ (p>0)$ とおくとき，放物線 $C_1: y=f(x)$，$C_2: y=g(x)$，および直線 $l: y=\frac{1}{2}x$ に対して，

$$f'(x)=2ax+b\,,\ \ g'(x)=2px+q$$

まず，C_1 と l は点 $(0,\ 0)$ で接することより，$f(0)=c=0$，$f'(0)=b=\frac{1}{2}$ となり，

$$f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，C_2 と l は点 $(4,\ 2)$ で接することより，

$$g(4)=16p+4q+r=2\,,\ \ g'(4)=8p+q=\frac{1}{2}$$

すると，$q=-8p+\frac{1}{2}$，$r=2-16p-4\left(-8p+\frac{1}{2}\right)=16p$ となり，

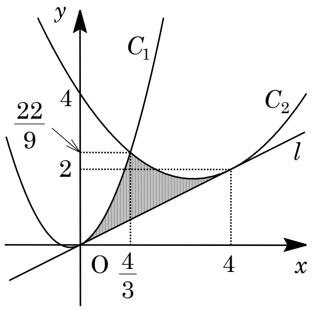
$$g(x)=px^2-\left(8p-\frac{1}{2}\right)x+16p\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{22}{9}\right)$ で交わることより，①②から，

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}a+\frac{2}{3}=\frac{22}{9}\,,\ \ g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}p-\frac{4}{3}\left(8p-\frac{1}{2}\right)+16p=\frac{22}{9}$$

すると，$a=1$，$p=\frac{1}{4}$ となり，$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$，$g(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$ である。

(2)　C_1，C_2 および l によって囲まれる右図の網点部を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，



$$V=2\pi\int_0^{\frac{4}{3}}x\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+2\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4}x\left\{g(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{4}{3}}x^3dx+2\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4}x\left(\frac{1}{4}x^2-2x+4\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{4}{3}}+2\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4}\frac{1}{4}x(x-4)^2dx=\frac{2^7}{3^4}\pi+\frac{1}{2}\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4}x(x-4)^2dx$$

ここで，$t=x-4$ とおくと，$dt=dx$ で，$x=\frac{4}{3}\to 4$ は $t=-\frac{8}{3}\to 0$ となり，

$$\int_{\frac{4}{3}}^{4}x(x-4)^2dx=\int_{-\frac{8}{3}}^{0}(t+4)t^2dt=\int_{-\frac{8}{3}}^{0}(t^3+4t^2)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{4}{3}t^3\right]_{-\frac{8}{3}}^{0}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8^4}{3^4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{8^3}{3^3}=-\frac{2^{10}}{3^4}+\frac{2^{11}}{3^4}=\frac{2^{10}}{3^4}$$

よって，$V=\frac{2^7}{3^4}\pi+\frac{2^9}{3^4}\pi=\frac{2^7}{3^4}(1+4)\pi=\frac{640}{81}\pi$ である。

［解 説］

y 軸回転体の体積を求める問題です。網点部の形から円筒分割を利用しています。なお，計算量はやや多めです。

5

問題のページへ

$a_1=a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，

条件 p ： $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

条件 q ： ${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=(-1)^n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(a)　$p\Rightarrow q$ の証明

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ のとき，$a_3=a_2+a_1=1+1=2$ となり，

$$\begin{aligned}{a_{n+2}}^2-a_{n+3}a_{n+1}&={a_{n+2}}^2-(a_{n+2}+a_{n+1})a_{n+1}={a_{n+2}}^2-a_{n+2}a_{n+1}-{a_{n+1}}^2\\&=a_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+1})-{a_{n+1}}^2=a_{n+2}a_n-{a_{n+1}}^2\\&=-({a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n)\end{aligned}$$

これより，${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=({a_2}^2-a_3a_1)(-1)^{n-1}=(1^2-2\cdot1)(-1)^{n-1}=(-1)^n$

(b)　$q\Rightarrow p$ の証明

${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=(-1)^n$ のとき，「$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ かつ $a_{n+1}>0$ かつ $a_n>0$」であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　${a_2}^2-a_3a_1=-1$ から $1^2-1\cdot a_3=-1$ となり，$a_3=2$ である。

これより，$a_3=a_2+a_1$ かつ $a_2>0$ かつ $a_1>0$ が成り立っている。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ かつ $a_{k+1}>0$ かつ $a_k>0$ と仮定する。

ここで，${a_{k+1}}^2-a_{k+2}a_k=(-1)^k$，${a_{k+2}}^2-a_{k+3}a_{k+1}=(-1)^{k+1}$ の両辺の和をとり，

$${a_{k+1}}^2-a_{k+2}a_k+{a_{k+2}}^2-a_{k+3}a_{k+1}=(-1)^k+(-1)^{k+1}$$

$$a_{k+2}(a_{k+2}-a_k)+a_{k+1}(a_{k+1}-a_{k+3})=0$$

$a_{k+2}-a_k=a_{k+1}$ より，$a_{k+2}a_{k+1}+a_{k+1}(a_{k+1}-a_{k+3})=0$ となり，$a_{k+1}>0$ から，

$$a_{k+2}+a_{k+1}-a_{k+3}=0,\quad a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$$

そして，$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k>0$，$a_{k+1}>0$ から，$n=k+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ かつ $a_{n+1}>0$ かつ $a_n>0$ である。

(a)(b)より，2 つの条件 p と q は同値である。

［解 説］

漸化式を題材にした論証問題です。直接的に示せた $p\Rightarrow q$ と同様に，$q\Rightarrow p$ も試みましたが，$a_n>0$ が簡単には示せません。そこで，帰納法の出番となるわけですが，それなら条件 p まで含めた形で証明と考え，書き直したのが上の解答例です。