1

解答解説のページへ

箱の中に, 2 と書かれた札 1 枚と, 3 と書かれた札 2 枚が入っている。この箱から札を 1 枚引き, 書かれている数字を見てからもとにもどす。この試行を n 回繰り返す。このとき, j 回目の試行で引いた札に書かれている数字を a_j とし，a_1，a_2，$\cdots$，a_n の積を A_n とおく。さらに，A_n を 12 で割った余りを r_n とする。$n \geqq 3$ のとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　2 と書かれた札が出る回数を p とする。このとき，$r_n = 6$ となるための p がみたす必要十分条件を求めよ。

(2)　$r_n = 6$ となる確率を n を用いて表せ。

(3)　$r_n = 0$ となる確率を n を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

四面体 OABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。辺 OA, OB, OC を $1:2$ に内分する点を，それぞれ P, Q, R とし，辺 BC, AC, AB を $2:1$ に内分する点を，それぞれ D, E, F とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 P, Q, D, E が同一平面上にあることを示せ。

(2) 4 点 P, Q, D, E の定める平面と直線 FR の交点を S とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(3)　不等式 $\dfrac{1}{1260} < \dfrac{22}{7} - \pi < \dfrac{1}{630}$ を示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a, b, c を定数とする。関数 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c\sin 2x$ は，$x=\frac{\pi}{4}$ で極大値 $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ をとるとする。また，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=12$ であるとする。このとき，a, b, c の値を求めよ。また，区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ は，すべての実数 a, b に対し，

$$f(a+b)=f(a)+f(b)+4ab$$

をみたすとする。さらに，関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，$f'(0)=2$ であるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で微分可能であることを示せ。また，関数 $f(x)$ を求めよ。

(3)　関数 $g(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt\ (x>1)$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　2 と書かれた札 1 枚と，3 と書かれた札 2 枚が入っている箱から札を 1 枚引き，数字を見てからもとにもどす試行を n 回繰り返すとき，引いた札に書かれている n 個の数字の積を A_n とおく。そして，A_n $(n \geqq 3)$ を 12 で割った余りを r_n とする。

$r_n = 6$ であるとき，$A_n = 12k + 6 = 6(2k+1)$ (k は自然数)と表せる。

ここで，2 と書かれた札が出る回数を p とすると，3 と書かれた札が出る回数は $n-p$ となるので，

$$A_n = 2^p \cdot 3^{n-p} = 6 \cdot 2^{p-1} \cdot 3^{n-p-1}$$

すると，$2^{p-1} \cdot 3^{n-p-1}$ は奇数より，$p-1=0$ から $p=1$ が必要である。

このとき，$n-p-1 = n-2 \geqq 1$ となるので，A_n は 6×(奇数)と表せ $r_n = 6$ である。

よって，$r_n = 6$ の条件は $p = 1$ である。

(2)　$r_n = 6$ であるのは，(1)より $p=1$ なので，その確率は，

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

(3)　$r_n = 0$ であるのは $A_n = 12k = 12 \cdot 2^{p-2} \cdot 3^{n-p-1}$ から，$p-2 \geqq 0$ かつ $n-p-1 \geqq 0$，すなわち $p \geqq 2$ かつ $n-p \geqq 1$ である。

ここで，2 と書かれた札が少なくとも 2 回出る事象を E，3 と書かれた札が少なくとも 1 回出る事象を F とおくと，$r_n = 0$ となる事象は $E \cap F$ と表せる。

すると，$P(\overline{E}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{(2+n)\cdot 2^{n-1}}{3^n}$，$P(\overline{F}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ であり，$n \geqq 3$ から $\overline{E} \cap \overline{F}$ は空事象なので $P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 0$ となり，

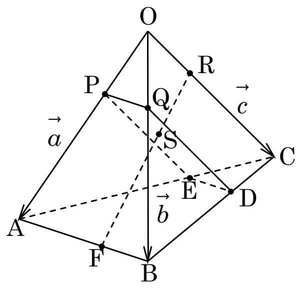
$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= 1 - P(\overline{E \cap F}) = 1 - P(\overline{E} \cup \overline{F}) \\ &= 1 - \{P(\overline{E}) + P(\overline{F}) - P(\overline{E} \cap \overline{F})\} = 1 - \frac{(2+n)\cdot 2^{n-1}}{3^n} - \frac{1}{3^n} + 0 \\ &= \frac{3^n - (2+n)\cdot 2^{n-1} - 1}{3^n} \end{aligned}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(3)は余事象と加法定理を利用する有名な方法です。

2

問題のページへ



(1)　四面体 OABC に対し，辺 OA，OB，OC を $1:2$ に内分する点を，それぞれ P, Q, R とし，辺 BC, AC, AB を $2:1$ に内分する点を，それぞれ D, E, F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{ED}}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+2\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ となるので, 4 点 P, Q, D, E は同一平面上にある。

(2)　4 点 P, Q, D, E の定める平面と直線 FR の交点を S とする。

まず, S は直線 FR 上にあるので, t を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OF}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\cdot\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+t\cdot\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1-t}{3}\vec{a}+\frac{2-2t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

また, S は 3 点 P, Q, D の定める平面上にあるので, p, q を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=p\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-p-q)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=p\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+q\cdot\frac{1}{3}\vec{b}+(1-p-q)\cdot\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$

$$=\frac{p}{3}\vec{a}+\frac{1-p}{3}\vec{b}+\frac{2-2p-2q}{3}\vec{c}$$

すると，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので,

$$\frac{1-t}{3}=\frac{p}{3}\cdots\cdots①,\quad \frac{2-2t}{3}=\frac{1-p}{3}\cdots\cdots②,\quad \frac{t}{3}=\frac{2-2p-2q}{3}\cdots\cdots③$$

①②から，$\frac{2p}{3}=\frac{1-p}{3}$ となり $p=\frac{1}{3}$，$t=1-p=\frac{2}{3}$

③に代入すると，$\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}-2q$ より $q=\frac{1}{3}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用について，基本的な問題です。(1)は図形的には当然なのですが。

3

問題のページへ

(1) $x^4(1-x)^4=x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)=x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8$ より，

$$I=\int_0^1 x^4(1-x)^4dx=\int_0^1(x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^6+\frac{6}{7}x^7-\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{9}x^9\Big]_0^1=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+\frac{6}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{630}$$

(2) $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=\dfrac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\dfrac{4}{x^2+1}$ より，

$$J=\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx=\int_0^1\Big(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}\Big)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{3}x^6+x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\Big]_0^1-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{22}{7}-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

ここで，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\big[\theta\big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

よって，$J=\dfrac{22}{7}-4\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{22}{7}-\pi$ である。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{1+x^2}\leqq 1$ であり，$x^4(1-x)^4\geqq 0$ なので，

$$\frac{1}{2}x^4(1-x)^4\leqq\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\leqq x^4(1-x)^4\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，等号は $x=0$ または $x=1$ のときのみ成り立つ。

そこで，$(*)$の各辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^4(1-x)^4dx<\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx<\int_0^1 x^4(1-x)^4dx$$

すると，$\dfrac{1}{2}I<J<I$ から，$\dfrac{1}{1260}<\dfrac{22}{7}-\pi<\dfrac{1}{630}$ となる。

［解　説］

定積分を利用した不等式の証明問題です。(1)(2)と(3)のつながりは定積分を実行すると，次第に見えてきます。なお，I については部分積分を利用する方法もあります。

4

問題のページへ

$f(x)=a\sin x+b\cos x+c\sin 2x$ に対して，$f'(x)=a\cos x-b\sin x+2c\cos 2x$

ここで，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ をとることより，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ で，かつ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ が必要であることより，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b+c=6\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots①,\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=12$ から，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x+c\sin 2x)dx=12$ となり，

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\cos x\,dx=12,\ \ 2b\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=12,\ \ 2b=12\cdots\cdots\cdots③$$

②③より $a=b=6$，①に代入すると $c=\sqrt{3}$ となり，このとき，

$$f(x)=6\sin x+6\cos x+\sqrt{3}\sin 2x$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=6\cos x-6\sin x+2\sqrt{3}\cos 2x=6(\cos x-\sin x)+2\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=2(\cos x-\sin x)\{3+\sqrt{3}(\cos x+\sin x)\}\\&=2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left\{3+\sqrt{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\end{aligned}$$

すると，$3+\sqrt{6}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$ から，$f'(x)$ の符号は $x=\dfrac{\pi}{4}$ の前後で正から負へと変化することより，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値をとる。

したがって，$a=b=6$，$c=\sqrt{3}$ である。

さて，区間 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，$f'(x)=0$ の解は $x=-\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{4}$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-6	↘		↗		↘	-6

これより，$f(x)$ の最小値は，

$$f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-6\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

［解　説］

微分と増減の問題です。後半の極大という十分性を確認するところは，$f'(x)$ の符号変化で処理をしましたが，$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$ を示しても構いません。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　すべての実数 a, b に対して，$f(a+b) = f(a) + f(b) + 4ab$ ………①

$b = 0$ を①に代入すると，$f(a) = f(a) + f(0)$ となり，$f(0) = 0$ である。

(2)　(1)から，$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}$ となり，$f'(0) = 2$ より

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2 \text{………②}$$

このとき，①から $f(x+h) = f(x) + f(h) + 4xh$ となり，②と合わせて，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 4xh}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 4x \right\} = 2 + 4x$$

よって，$f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で微分可能であり，$f'(x) = 2 + 4x$ となる。

$$f(x) = \int (2 + 4x)\,dx = 2x^2 + 2x + C \quad (C\text{ は定数})$$

すると，$f(0) = 0$ から $C = 0$ となり，$f(x) = 2x^2 + 2x$ である。

(3)　$x > 1$ において，$g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{f(t)}\,dt$ とすると，(2)より，

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{2t^2 + 2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log t - \log(t+1) \Big]_1^x = \frac{1}{2}\Big[\log \frac{t}{t+1} \Big]_1^x = \frac{1}{2}\left(\log \frac{x}{x+1} - \log \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{2}\log 2$$

よって，$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \dfrac{1}{2}\log 1 + \dfrac{1}{2}\log 2 = \dfrac{1}{2}\log 2$ である。

［解　説］

関数方程式についての基本題です。誘導に従えば，(3)の結論までスムーズに流れていきます。