1

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標平面上において，点 A, B が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ を満たすとする。また，点 A を通り直線 OB と平行な直線上の点 C が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}<0$ を満たすとする。直線 OA と直線 BC の交点を D とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\cos\angle\mathrm{AOC}$ を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{OBD}$ の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b を定数とし，$a \neq 0$ とする。xy 平面上において，円 $x^2+y^2=1$ を C_1 とし，放物線 $y=ax^2+b$ を C_2 とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=-1$ のとき，C_2 は C_1 の内部を 3 つの部分に分ける。このうち原点を含む部分の面積を求めよ。

(2)　$a>0$，$b<-1$ とする。このとき，C_1 と C_2 が共有点をもつための条件を a, b を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

a_1, a_2, $\cdots$, a_n をそれぞれ 0 から 9 までの整数とし，$a_n \neq 0$ とする。n 桁の自然数 $a = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^1 + a_1$ に対し，a_k を a の 10^{k-1} の位の数という。また，$n \geqq 5$ のとき，$a_5 \cdot 10^4 + a_4 \cdot 10^3 + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_1$ を a の下 5 桁という。例えば，7 桁の自然数 1234567 の 100 の位の数は 5 であり，下 5 桁は 34567 である。次の問いに答えよ。

(1)　$(1001)^{15}$ の下 5 桁を求めよ。

(2)　7^{80} の下 5 桁を求めよ。

(3)　2 桁の自然数のうち，1 の位の数と 10 の位の数の和の 2 乗がその自然数自身に等しいものをすべて求めよ。

(4)　4 桁の自然数のうち，1 の位の数と 10 の位の数と 100 の位の数と 1000 の位の数の和の 4 乗がその自然数自身に等しいものをすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を，$f(x)=x^3-\dfrac{5}{3}x$ で定める。a を正の定数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_1，点 $(a,\ f(a))$ を通り l_1 と垂直な直線を l_2 とする。次の問いに答えよ。

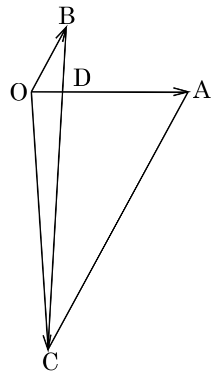
(1)　直線 l_1 の方程式を a を用いて表せ。

(2)　直線 l_2 の方程式を a を用いて表せ。

(3)　直線 l_2 と曲線 $y=f(x)$ が 1 点だけを共有するとき，正の定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$のとき，点 A を通り直線 OB と平行な直線上の点 C は，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=5$から，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=25$となり，

$$3^2+2t\cdot 2+t^2\cdot 2=25,\ t^2+2t-8=0$$

すると，$(t+4)(t-2)=0$から，$t=-4,\ 2$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2+2t<0$から，$t<-1$となるので，$t=-4$である。

よって，$(*)$から$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}})=3^2-4\cdot 2=1$となるので，

$$\cos\angle\mathrm{AOC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{15}$$

(3)　(2)から，$\sin\angle\mathrm{AOC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{15}\right)^2}=\frac{\sqrt{15^2-1^2}}{15}=\frac{\sqrt{(15+1)(15-1)}}{15}=\frac{4}{15}\sqrt{14}$

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\sin\angle\mathrm{AOC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{4}{15}\sqrt{14}=2\sqrt{14}$$

(4)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$から，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となる。

すると，$\mathrm{OB}:\mathrm{AC}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|:|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1:4$となり，$\mathrm{OB}\,/\!/\,\mathrm{AC}$から，

$$\mathrm{OD}:\mathrm{AD}=\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=1:4$$

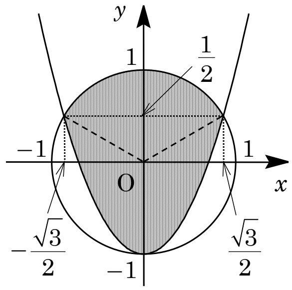
よって，$\triangle\mathrm{OBD}=\left(\frac{1}{4}\right)^2\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{5}\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{20}\cdot 2\sqrt{14}=\frac{\sqrt{14}}{10}$である。

［解　説］

基本的な内容の平面ベクトルの問題です。なお，(3)は(2)との関係を考えて，記述しています。公式処理すると，代入するだけですが。

2

問題のページへ



(1)　円 $C_1: x^2+y^2=1$ ……①と放物線 $C_2: y=ax^2+b$ ……②を連立すると，$y=a(1-y^2)+b$ から，

$$ay^2+y-a-b=0 \cdots\cdots③$$

ここで，$a=2$，$b=-1$ のとき，③より，

$$2y^2+y-1=0,\ (2y-1)(y+1)=0$$

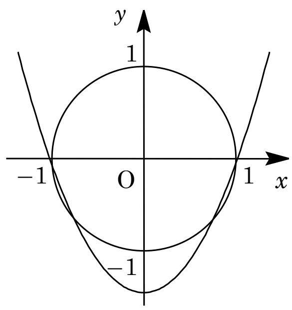
$y=\dfrac{1}{2}$ のとき，①から $x^2=\dfrac{3}{4}$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y=-1$ のとき，①から $x^2=0$，$x=0$

さて，原点と交点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を結ぶ線分 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ と x 軸の正の部分とのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ なので，右図の網点部の面積を S とすると，y 軸に関する対称性から，

$$S=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-2x^2+1\right)dx+2\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=2\Big[\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{2}{3}x^3+x\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\pi}{3}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$



(2)　$a>0$，$b<-1$ のとき，C_1 と C_2 が共有点をもつ条件は，③が $-1\leqq y\leqq 1$ に実数解をもつことである。

$f(y)=ay^2+y-a-b=a\left(y+\dfrac{1}{2a}\right)^2-\dfrac{1}{4a}-a-b$ とおくと，③は $f(y)=0$ となり，

$$f(-1)=a-1-a-b=-1-b>0$$

$$f(1)=a+1-a-b=1-b>0$$

これより，求める条件は，

$$-1<-\frac{1}{2a}<1 \cdots\cdots④,\ \ -\frac{1}{4a}-a-b\leqq 0 \cdots\cdots⑤$$

$a>0$，$b<-1$ と合わせると，④⑤から $a>\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{4a}-a\leqq b<-1$ である。

［解　説］

放物線と円の関係を題材にした標準的な問題です。なお, (2)は, 2 次方程式の解の配置が対応します。

3

問題のページへ

(1)　$(1001)^{15}=(10^3+1)^{15}=(10^3)^{15}+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_2(10^3)^2+{}_{15}\mathrm{C}_1(10^3)^1+1$

$$=10^{45}+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_2\cdot10^6+{}_{15}\mathrm{C}_1\cdot10^3+1$$

$$=10^5(10^{40}+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_2\cdot10)+15\cdot10^3+1$$

これより，$(1001)^{15}$ の下 5 桁は $15\cdot10^3+1=15001$ である。

(2)　$7^4=2401=2400+1$ に着目すると，

$$7^{80}=(7^4)^{20}=(2400+1)^{20}$$

$$=(2400)^{20}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_3(2400)^3+{}_{20}\mathrm{C}_2(2400)^2+{}_{20}\mathrm{C}_1(2400)^1+1$$

$$=10^5(24^{20}10^{15}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_3\cdot24^3\cdot10)+190\cdot2400^2+20\cdot2400+1$$

$$=10^5(24^{20}10^{15}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_3\cdot24^3\cdot10+19\cdot24^2)+20\cdot2400+1$$

これより，7^{80} の下 5 桁は $20\cdot2400+1=48001$ である。

(3)　2 桁の自然数を $a=10p+q$ $(1\leqq p\leqq9,\ 0\leqq q\leqq9)$ とおくと，条件より，

$$(p+q)^2=a\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，2 桁の平方数は 16, 25, 36, 49, 64, 81 だけであることに注意すると，

・$a=4^2=16$ のとき　$(p,\ q)=(1,\ 6)$ より，①は成り立たない。

・$a=5^2=25$ のとき　$(p,\ q)=(2,\ 5)$ より，①は成り立たない。

・$a=6^2=36$ のとき　$(p,\ q)=(3,\ 6)$ より，①は成り立たない。

・$a=7^2=49$ のとき　$(p,\ q)=(4,\ 9)$ より，①は成り立たない。

・$a=8^2=64$ のとき　$(p,\ q)=(6,\ 4)$ より，①は成り立たない。

・$a=9^2=81$ のとき　$(p,\ q)=(8,\ 1)$ より，①は成り立つ。

したがって，求める 2 桁の自然数は 81 である。

(4)　4 桁の自然数を $b=1000p+100q+10r+s$ とおくと，条件より，

$$(p+q+r+s)^4=b\ \cdots\cdots\cdots②$$

ただし，$1\leqq p\leqq9,\ 0\leqq q\leqq9,\ 0\leqq r\leqq9,\ 0\leqq s\leqq9$ である。

ここで，4 桁の 4 乗数は $6^4=1296$，$7^4=2401$，$8^4=4096$，$9^4=6561$ だけであることに注意すると，

・$b=1296$ のとき　$(p,\ q,\ r,\ s)=(1,\ 2,\ 9,\ 6)$ より，②は成り立たない。

・$b=2401$ のとき　$(p,\ q,\ r,\ s)=(2,\ 4,\ 0,\ 1)$ より，②は成り立つ。

・$b=4096$ のとき　$(p,\ q,\ r,\ s)=(4,\ 0,\ 9,\ 6)$ より，②は成り立たない。

・$b=6561$ のとき　$(p,\ q,\ r,\ s)=(6,\ 5,\ 6,\ 1)$ より，②は成り立たない。

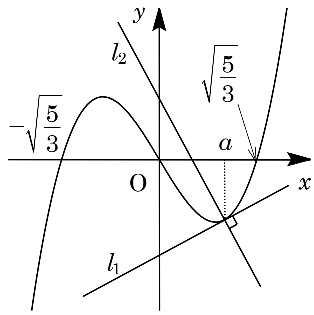
したがって，求める 4 桁の自然数は 2401 である。

［解　説］

前半と後半の繋がりが感じられない 2 タイプの整数問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$f(x)=x^3-\frac{5}{3}x$ に対し，$f'(x)=3x^2-\frac{5}{3}$

すると，点 $(a,\ f(a))$ における接線 l_1 の方程式は,

$$y-\left(a^3-\frac{5}{3}a\right)=\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)(x-a)$$

$$y=\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)x-2a^3$$

(2)　点 $(a,\ f(a))$ を通り l_1 と垂直な直線 l_2 は，法線ベクトルを $\left(1,\ 3a^2-\frac{5}{3}\right)$ とすることができ，その方程式は,

$$(x-a)+\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left(y-a^3+\frac{5}{3}a\right)=0$$

$$x+\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)y-3a^5+\frac{20}{3}a^3-\frac{34}{9}a=0\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　①は $(x-a)+f'(a)\{y-f(a)\}=0$ と表せることから，$y=f(x)$ と連立すると，$(x-a)+f'(a)\{f(x)-f(a)\}=0$ となり，

$$(x-a)+\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left\{\left(x^3-\frac{5}{3}x\right)-\left(a^3-\frac{5}{3}a\right)\right\}=0$$

$$(x-a)\left\{1+\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left(x^2+ax+a^2-\frac{5}{3}\right)\right\}=0$$

$$(x-a)\left\{\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)x^2+a\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)x+3a^4-\frac{20}{3}a^2+\frac{34}{9}\right\}=0\cdots\cdots\cdots②$$

直線 l_2 と曲線 $y=f(x)$ が 1 点だけを共有する条件は，②の実数解が $x=a>0$ だけということである。

そこで，$g(x)=\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)x^2+a\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)x+3a^4-\frac{20}{3}a^2+\frac{34}{9}$ とおくと，

(i)　$g(x)=0$ の解が $x=a$ だけのとき

$$g(a)=\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)a^2+a\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)a+3a^4-\frac{20}{3}a^2+\frac{34}{9}=9a^4-10a^2+\frac{34}{9}$$

$$=9\left(a^2-\frac{5}{9}\right)^2+1>0$$

これより，$g(x)=0$ は $x=a$ という解をもたないので，不適である。

(ii)　$g(x)=0$ が実数解をもたないとき

(ii-i)　$3a^2-\frac{5}{3}=0\ \left(a=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ のとき

$g(x)=3\cdot\frac{25}{81}-\frac{20}{3}\cdot\frac{5}{9}+\frac{34}{9}=1$ となり，$g(x)=0$ は実数解をもたないので適する。

(ii-ii)　$3a^2-\frac{5}{3}\neq0\ \left(a\neq\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ のとき

$g(x)=0$ が実数解をもたない条件は，判別式 $D<0$ より，

$$a^2\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)^2-4\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left(3a^4-\frac{20}{3}a^2+\frac{34}{9}\right)<0$$

$$\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left\{a^2\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)-4\left(3a^4-\frac{20}{3}a^2+\frac{34}{9}\right)\right\}<0$$

$$\left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left(9a^4-\frac{75}{3}a^2+\frac{136}{9}\right)>0\,,\ \left(3a^2-\frac{5}{3}\right)\left(3a^2-\frac{8}{3}\right)\left(3a^2-\frac{17}{3}\right)>0$$

これより，$\dfrac{5}{3}<3a^2<\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{17}{3}<3a^2$となり，$\dfrac{5}{9}<a^2<\dfrac{8}{9}$，$\dfrac{17}{9}<a^2$

よって，$a>0$から，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{17}}{3}<a$となる。

(i)(ii)より，求めるaの値の範囲は，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}\leqq a<\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{17}}{3}<a$である。

［解　説］

接線と法線を題材とした問題です。ただ，(3)は方針が立てやすいものの，計算量は半端ではありません。なお，(2)では場合分けを避けるために，法線ベクトルを利用して立式しています。