1

解答解説のページへ

n を正の奇数とする。1 から n までの奇数の和を S_n，1 から n までの奇数の 2 乗の和を T_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　S_n，T_n を n を用いて表せ。

(2)　$(n+1)^2$ と n は互いに素であることを示せ。

(3)　3 以上の奇数 n に対して S_n は n で割り切れないことを示せ。

(4)　T_n が n で割り切れるための n の条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

k を自然数，$0<\alpha<1$ とする。表の出る確率が α，裏の出る確率が $1-\alpha$ のコインを投げて，最初，数直線の原点にあった点 P の位置を，表が出たら k だけ，裏が出たら 1 だけ右に進める。以降，移動した位置でコインを投げてこの操作を繰り返す。例えば，コインが「表，表，裏」と出た場合，点 P の位置を表す座標は，最初の座標 0 から k，$2k$，$2k+1$ と変化する。n を自然数として，コインを n 回投げるとき，1 回目から n 回目までのどこかで点 P の座標が n となる確率を p_n とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=2$ とする。このとき，p_1，p_2，p_3 を α を用いて表せ。

(2)　$k=2$ とする。$n\geqq 1$ に対して p_n を n と α を用いて表せ。

(3)　$k=3$ とする。$n\geqq 3$ のとき，$p_n-(1-\alpha)^n$ は α の多項式として表される。その多項式の最も次数の高い項の係数を n を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

変数 t に対して，xy 平面上の曲線 $C_t : y = 3tx^2 - t^3$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 3 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

(2) t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 1 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

領域を図示する際は，その境界線や境界点が含まれるか否かがはっきりとわかるように図示せよ。

4

解答解説のページへ

座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面上に点 A, B, C があり，関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{6}$$

を満たしているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を求めよ。

(2) △OAB を含む平面に点 C から垂線 CP を下ろす。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 a, b を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　正の奇数 n に対し，m を自然数として $n=2m-1$ とおくと，

$$S_n=1+3+\cdots+n=1+3+\cdots+(2m-1)=\sum_{j=1}^{m}(2j-1)=2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-m$$

$$=m^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(n+1)^2$$

$$T_n=1^2+3^2+\cdots+n^2=1^2+3^2+\cdots+(2m-1)^2=\sum_{j=1}^{m}(2j-1)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(4j^2-4j+1)=4\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-4\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+m$$

$$=\frac{1}{3}m\{2(m+1)(2m+1)-6(m+1)+3\}=\frac{1}{3}m(4m^2-1)$$

$$=\frac{1}{3}m(2m-1)(2m+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2)　$(n+1)^2$ と n の最大公約数を g とおくと，a と b を互いに素な自然数として，

$$(n+1)^2=ga,\ \ n=gb$$

すると，$n^2+2n+1=ga$ から $g^2b^2+2gb+1=ga$ となり，

$$g(a-gb^2-2b)=1$$

$a-gb^2-2b$ は整数なので $g=1$ となり，$(n+1)^2$ と n は互いに素である。

(3)　3 以上の奇数 n に対し，S_n が n で割り切れるとすると，k を自然数として，

$$\frac{S_n}{n}=k,\ \ \frac{1}{4}(n+1)^2=kn,\ \ (n+1)^2=4kn\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$(n+1)^2$ は 3 以上の奇数 n の倍数となるが, (2)から $(n+1)^2$ と n は互いに素なので，①は成立しない。すなわち，S_n は n で割り切れない。

(4)　T_n が n で割り切れるとすると，l を自然数として，

$$\frac{T_n}{n}=l,\ \ \frac{1}{6}(n+1)(n+2)=l,\ \ (n+1)(n+2)=6l\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，n が奇数より $n+1$ は偶数になるので，②が成立する条件は $n+1$ または $n+2$ が 3 の倍数になること，すなわち n が 3 の倍数でないことである。

［解　説］

整数と数列の融合問題です。(2)と(3)は関連しますが，(4)は独立題です。

2

問題のページへ

(1)　表の出る確率がα，裏の出る確率が$1-\alpha$のコインを投げて，数直線の原点にあった点Pの位置を，表が出たらkだけ，裏が出たら1だけ右に進める。コインをn回投げ，1回目からn回目までのどこかで，点Pの座標がnとなる確率をp_nとおく。

さて，$k=2$のとき，$p_1=1-\alpha$，$p_2=(1-\alpha)^2+\alpha=1-\alpha+\alpha^2$

$$p_3=(1-\alpha)^3+{}_2\mathrm{C}_1\,\alpha(1-\alpha)=1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3+2\alpha-2\alpha^2$$
$$=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3$$

(2)　$k=2$のとき，点Pの座標がnとなる確率p_nに対し，$n\geqq 3$として，

(i)　コインを投げて第1回目に裏が出たとき

点Pが座標1に進み，その後，座標nに進む確率は，$(1-\alpha)p_{n-1}$と表せる。

(ii)　コインを投げて第1回目に表が出たとき

点Pが座標2に進み，その後，座標nに進む確率は，αp_{n-2}と表せる。

(i)(ii)より，$p_n=(1-\alpha)p_{n-1}+\alpha p_{n-2}\ \ (n\geqq 3)$

これより，$p_{n+2}=(1-\alpha)p_{n+1}+\alpha p_n\ (n\geqq 1)$となり，

$$p_{n+2}-p_{n+1}=-\alpha(p_{n+1}-p_n)\cdots\cdots①,\ \ p_{n+2}+\alpha p_{n+1}=p_{n+1}+\alpha p_n\cdots\cdots②$$

①より，$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)(-\alpha)^{n-1}=\alpha^2(-\alpha)^{n-1}=(-\alpha)^{n+1}\cdots\cdots\cdots③$

②より，$p_{n+1}+\alpha p_n=p_2+\alpha p_1=(1-\alpha+\alpha^2)+\alpha(1-\alpha)=1\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$(\alpha+1)p_n=1-(-\alpha)^{n+1}$となり，$p_n=\dfrac{1-(-\alpha)^{n+1}}{1+\alpha}$である。

(3)　$k=3$のとき，(1)と同様に考えると，$p_3=(1-\alpha)^3+\alpha$となり，

$$p_4=(1-\alpha)^4+{}_2\mathrm{C}_1\,\alpha(1-\alpha),\ \ p_5=(1-\alpha)^5+{}_3\mathrm{C}_1\,\alpha(1-\alpha)^2$$

すると，$n\geqq 3$のとき，点Pの座標がnとなるのは，「表が0回，裏がn回」，「表が1回，裏が$n-3$回」，「表が2回，裏が$n-6$回」，…であることより，

$$p_n=(1-\alpha)^n+{}_{n-2}\mathrm{C}_1\,\alpha(1-\alpha)^{n-3}+{}_{n-4}\mathrm{C}_2\,\alpha^2(1-\alpha)^{n-6}+\cdots\cdots$$
$$p_n-(1-\alpha)^n={}_{n-2}\mathrm{C}_1\,\alpha(1-\alpha)^{n-3}+{}_{n-4}\mathrm{C}_2\,\alpha^2(1-\alpha)^{n-6}+\cdots\cdots$$

これより，$p_n-(1-\alpha)^n$はαについての$n-2$次式となるので，最高次である$n-2$次の係数は，${}_{n-2}\mathrm{C}_1(-1)^{n-3}=(n-2)\cdot(-1)^{n-3}$である。

［解　説］

確率と漸化式の頻出タイプの問題です。ただ，(3)については，(2)とは独立に(1)のプロセスを参考にして考えました。やや雑な記述ですが。

3

問題のページへ

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 $C_t : y = 3tx^2 - t^3$ が通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，t についての 3 次方程式 $y = 3tx^2 - t^3$，すなわち $t^3 - 3x^2t + y = 0$ が実数解をもつ条件に対応する。そこで，$f(t) = t^3 - 3x^2t + y$ とおく。

さて，C_t がちょうど 3 回通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，$f(t) = 0$ が 3 個の実数解をもつ条件として表され，$f'(t) = 3t^2 - 3x^2 = 3(t+x)(t-x)$ から，

(i)　$x > 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表より，求める条件は，

$f(-x) = 2x^3 + y > 0$ ，$f(x) = -2x^3 + y < 0$

となり，まとめると，

$-2x^3 < y < 2x^3$

t	$\cdots$	$-x$	$\cdots$	x	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii)　$x = 0$ のとき

$f(t) = t^3 + y$ となり，$f(t) = 0$ が 3 個の実数解をもつことはない。

(iii)　$x < 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表より，求める条件は，

$f(-x) = 2x^3 + y < 0$ ，$f(x) = -2x^3 + y > 0$

となり，まとめると，

$2x^3 < y < -2x^3$

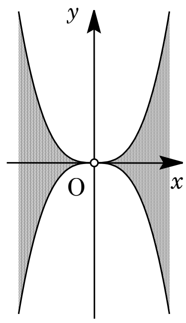
t	$\cdots$	x	$\cdots$	$-x$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，

$-2x^3 < y < 2x^3\ (x > 0)$，$2x^3 < y < -2x^3\ (x < 0)$

図示すると，右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含まない。



(2)　C_t がちょうど 1 回通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，$f(t) = 0$ が 1 個の実数解をもつ条件として表され，(1)の過程を利用すると，

(i)　$x > 0$ のとき

$f(-x) = 2x^3 + y < 0$ または $f(x) = -2x^3 + y > 0$ となり，

$y < -2x^3$　または　$y > 2x^3$

(ii)　$x = 0$ のとき

$f(t) = t^3 + y$ となり，$f(t) = 0$ はつねに 1 個の実数解をもつ。

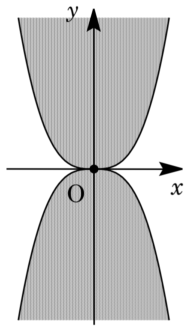
(iii)　$x < 0$ のとき

$f(-x) = 2x^3 + y > 0$ または $f(x) = -2x^3 + y < 0$ となり，

$y > -2x^3$　または　$y < 2x^3$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右図の網点部である。

ただし，原点以外の境界は領域に含まない。

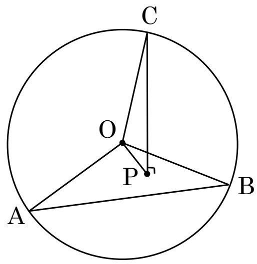


［解　説］

曲線の通過領域を図示する頻出題です。(2)は(1)のプロセスを流用するだけです。

4

問題のページへ



(1) 原点 O を中心とする球面上の 3 点 A, B, C に対して,

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ ， $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}$ ，

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{6}$ のとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ を含む平面に点 C から垂線 CP を下ろし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ ………①，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ ………②

①より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$ となり，$a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}=0$ ………③

②より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$ となり，$\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{6}=0$ ………④

③④より，$a=\frac{5}{9}$，$b=-\frac{4}{9}$ となる。

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{9}(5\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}-9\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ となり,

$$|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}-9\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=5^2+4^2+9^2-40\cdot\frac{1}{2}+72\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)-90\cdot\frac{1}{3}=60$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{9}|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}-9\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{9}\sqrt{60}=\frac{2}{9}\sqrt{15}$ である。

すると，四面体 OABC の体積 V は，(1)より,

$$V=\frac{1}{3}S\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{15}=\frac{\sqrt{5}}{18}$$

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用についての基本的な問題です。