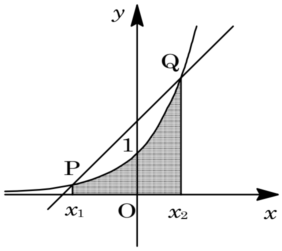
$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$C: y=e^x$ が 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ を通るので,

$y_1 = e^{x_1}$，$y_2 = e^{x_2}$ より,

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{x_2 - x_1} = e^c \cdots\cdots\cdots ①$$

$l: y = ax+b$ が 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ を通るので,

$y_1 = ax_1 + b$，$y_2 = ax_2 + b$ より,

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) = ac \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(e^c - 1)y_1 = ac$，$y_1 = \dfrac{ac}{e^c - 1}$

①より，$y_2 = \dfrac{ace^c}{e^c - 1}$

(2)　条件より，$\mathrm{PQ}=1$ なので $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 1$

②より，$c^2 + a^2c^2 = 1$，$c^2(1+a^2) = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

$a>0$，$c>0$ より，$a = \dfrac{\sqrt{1-c^2}}{c} \cdots\cdots\cdots ④$

ここで, (1)の結果から,

$$V(a) = \int_{x_1}^{x_2} \pi(e^x)^2 dx = \frac{\pi}{2}(e^{2x_2} - e^{2x_1}) = \frac{\pi}{2}({y_2}^2 - {y_1}^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{ac(e^c+1)}{e^c-1}\cdot ac = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2c^2(e^c+1)}{e^c-1}$$

$$\frac{V(a)}{a} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{ac^2(e^c+1)}{e^c-1} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1-c^2}\cdot\frac{c}{e^c-1}(e^c+1)\ \text{（④より）}$$

$a\to\infty$ のとき③より $c\to+0$ となり，$\dfrac{e^c-1}{c}\to 1$ から,

$$\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a} = \frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = \pi$$

[解　説]

(1)の誘導に乗れば, (2)の極限値はスムーズに求まります。なお，もとの問題には, $b>0$ という条件がついていましたが, 新聞にも出ていましたように，この条件は(2)では不必要のものでした。

$\boxed{2}$

問題のページへ

複素数平面を設定し，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とおくとき，△ABC が正三角形の条件は，以下，複号同順として，

$$\beta-\alpha=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\gamma-\alpha)$$

ここで，$\alpha=a_1+a_2i$，$\beta=b_1+b_2i$，$\gamma=c_1+c_2i$ とし, 3 点 A, B, C がすべて有理点, すなわち a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2 がすべて有理数と仮定すると,

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)i=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\{(c_1-a_1)+(c_2-a_2)i\}$$

$b_1-a_1=p$，$b_2-a_2=q$，$c_1-a_1=2s$，$c_2-a_2=2t$ とおくと, p, q, s, t はすべて有理数となり,

$$p+qi=(1\pm\sqrt{3}i)(s+ti)=(s\mp\sqrt{3}t)+(t\pm\sqrt{3}s)i$$

よって，$p=s\mp\sqrt{3}t$，$q=t\pm\sqrt{3}s$

$\sqrt{3}$ は無理数なので，$p=s$ かつ $t=0$，$q=t$ かつ $s=0$

まとめると，$p=q=s=t=0$ より，$a_1=b_1=c_1$，$a_2=b_2=c_2$ となるので, 3 点 A, B, C は一致する。すなわち, △ABC は存在しない。

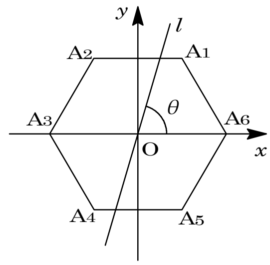
以上より, 3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しない。

[解 説]

△ABC の面積に注目して, 題意を証明することもできます。このような解法を利用する類題が, 92 年の東大・理で出題されています。

3

問題のページへ



O を原点とし，$1 \leqq k \leqq 6$で，一般性を失うことなく $\mathrm{A}_k\left(r\cos\dfrac{k\pi}{3},\ r\sin\dfrac{k\pi}{3}\right)$とおくことができる。

また l の方向ベクトルを$(\cos\theta,\ \sin\theta)$とすると，法線ベクトルは$(-\sin\theta,\ \cos\theta)$とおけるので，

$$l : -x\sin\theta + y\cos\theta = 0$$

すると，点と直線との距離の公式を用いて，

$$d_k = \frac{\left|-r\cos\frac{k\pi}{3}\sin\theta + r\sin\frac{k\pi}{3}\cos\theta\right|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}} = r\left|\sin\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)\right|$$

$$D = \sum_{k=1}^{6} {d_k}^2 = r^2\sum_{k=1}^{6}\sin^2\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right) = \frac{r^2}{2}\sum_{k=1}^{6}\left\{1-\cos 2\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)\right\}$$

$$= 3r^2 - \frac{r^2}{2}\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}-2\theta\right)$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}-2\theta\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\theta\right)+\cos(2\pi-2\theta)$$

$$+\cos\left(\frac{8\pi}{3}-2\theta\right)+\cos\left(\frac{10\pi}{3}-2\theta\right)+\cos(4\pi-2\theta)$$

$$= 2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\theta\right)+\cos(2\pi-2\theta)\right\}$$

$$= 2\left\{2\cos(\pi-2\theta)\cos\frac{\pi}{3}+\cos(-2\theta)\right\}$$

$$= 2(-\cos 2\theta + \cos 2\theta)$$

$$= 0$$

以上より，$D = 3r^2$

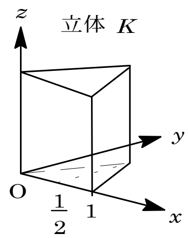
[解 説]

正六角形と直線 l の位置関係は相対的なので，どちらか一方を「よい位置」に配置することができます。上の解は前者を「よい位置」に配置したものです。

4　　　　問題のページへ

立体Kを表す不等式は,

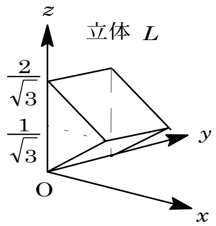
$$y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}x,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(x-1) \cdots\cdots\cdots ①$$



立体Lを表す不等式は,

$$x \geqq 0,\ \ z \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ②$$

立体 K と L の共通部分を平面$x = k$で切った断面で考える。また, その面積を$S(k)$とおく。



②より, $k \geqq 0,\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}k \leqq z \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ③$

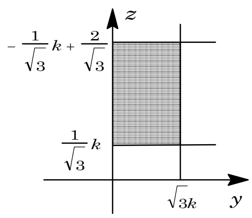
断面が存在する条件は, $\frac{1}{\sqrt{3}}k \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}}$ より, $k \leqq 1$ となるので, $0 \leqq k \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$

①より, $y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}k,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(k-1) \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より, $\sqrt{3}k \leqq -\sqrt{3}(k-1) \iff 0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}$, $\sqrt{3}k \geqq -\sqrt{3}(k-1) \iff \frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$

(i)　$0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}$ のとき

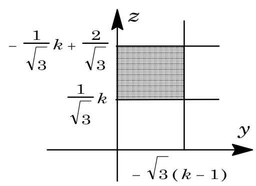
③⑤より$x = k$で切った断面は右図のようになる。



$$S(k) = \sqrt{3}k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$
$$= -2k(k-1)$$

(ii)　$\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

③⑤より$x = k$で切った断面は右図のようになる。



$$S(k) = -\sqrt{3}(k-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$
$$= 2(k-1)^2$$

以上より, 立体KとLの共通部分の体積Vは,

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} -2k(k-1)\,dk + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2(k-1)^2\,dk = \left[-\frac{2}{3}k^3 + k^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\left[(k-1)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

[解 説]

2 つの立体の共通部分の体積を求めるという以前からの頻出題の一つです。現行の課程では出題されなくなるという噂もありましたが, そうではありませんでした。

5

問題のページへ

2 枚の紙を表を上にして重ね合わせたとき，16 個のマス目のうち重なるマス目には同じ番号を書いてみると，右図のようになる。これより，どの番号も 4 つのマス目に書かれていることがわかる。

2	3	4	2
4	1	1	3
3	1	1	4
2	4	3	2

ここで，A が塗りつぶしたマス目の状態について場合分けをして，A と B が塗りつぶしたマス目がどれも重ならない確率を求める。

(i)　A が同じ番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_1$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 12 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_1=\frac{1}{20}\times\frac{11}{20}\times 4=\frac{11}{100}$$

(ii)　A が異なる番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_2$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 8 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_2=\frac{2}{15}\times\frac{7}{30}\times 6=\frac{14}{75}$$

以上より，求める確率は，$\dfrac{11}{100}+\dfrac{14}{75}=\dfrac{89}{300}$

[解　説]

難問風の問題設定にドキッとします。しかし，まん中の 4 つは同じというように考えていけば，結論までのプロセスが次第に見えてきます。