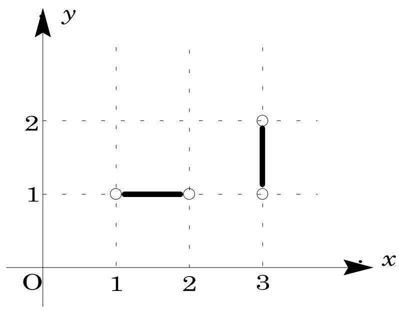
1　　解答解説のページへ

座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問いに答えよ。

(1)　点P$(630,\ 5400)$を通る直線 $y = ax$（a は定数）は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

(2)　n を 2 以上の整数とする。点P$(630,\ 5400)$を通る曲線 $y = bx^n$（b は n により定まる定数）は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。



格子辺の例

2

解答解説のページへ

n を 1 以上の整数とする。n 次の整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

とその導関数 $f'(x)$ の間に

$$nf(x)=(x+p)f'(x)$$

という関係があるとする。ただし, p は定数である。このとき

$$f(x)=a_0(x+p)^n$$

であることを示せ。

3

解答解説のページへ

(1)　a を 1 より大きい実数とする。0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log 2+\frac{x}{2}\log a \leqq \log(1+a^x) \leqq \log 2+\frac{x}{2}\log a+\frac{x^2}{8}(\log a)^2$$

ただし，対数は自然対数である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して，$a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく。(1)の不等式を用いて極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

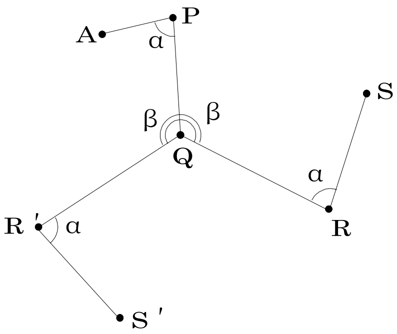
平面上において, 7 点 A，P，Q，R，S，R′，S′ を下図のようにとる。ただし,

$$\mathrm{AP}=a,\ \ \mathrm{PQ}=b,\ \ \mathrm{QR}=\mathrm{QR'}=c,\ \ \mathrm{RS}=\mathrm{R'S'}=d$$

$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{SRQ}=\angle\mathrm{S'R'Q}=\alpha\quad(0\leqq\alpha\leqq\pi)$$

$$\angle\mathrm{RQP}=\angle\mathrm{PQR'}=\beta\quad(0\leqq\beta\leqq\pi)$$

である。このとき，$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS'}^2$ を $\sin\alpha$，$\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。



5　解答解説のページへ

座標空間において

平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする。また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，

円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m

円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M

とする。次の問いに答えよ。

(1)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ。

(2)　$|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする。図形 H の体積を求めよ。