1

解答解説のページへ

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=1-\dfrac{1}{2}e^{nx}+\cos\dfrac{x}{3}$ $(x \geqq 0)$ で定める。ただし，e は自然対数の底である。

(1) 方程式 $f_n(x)=0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1)における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

α，β を複素数とし，複素数 z に対して，$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ とおく。α，β は $|f(1)-3|\leqq 1$ かつ $|f(i)-1|\leqq 3$ を満たしながら動く。ただし，i は虚数単位である。

(1)　$f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。

(2)　$f(1+i)=0$ であるとき，α，β の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

空間内の 2 直線 $l,\ m$ はねじれの位置にあるとする。l と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

4

解答解説のページへ

$a>1$ とする。xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。

(1)　円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(2)　円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする。(1)における V_1 について，$V_1=2V_2$ となる a の値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする。

(1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f_n(x)=1-\dfrac{1}{2}e^{nx}+\cos\dfrac{x}{3}$ $(x\geqq 0)$ に対し，$f_n{}'(x)=-\dfrac{n}{2}e^{nx}-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

n は自然数で $x\geqq 0$ から，$\dfrac{n}{2}e^{nx}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}\geqq\dfrac{1}{2}e^0-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}>0$ であり，これより $f_n{}'(x)<0$ となるので，$f_n(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に減少し，

$$f_n(0)=1-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}>0,\ f_n(3\pi)=1-\frac{1}{2}e^{3n\pi}-1=-\frac{1}{2}e^{3n\pi}<0$$

よって，方程式 $f_n(x)=0$ は $0<x<3\pi$ にただ 1 つの実数解をもつ。

(2)　$f_n(a_n)=0$ から $1-\dfrac{1}{2}e^{na_n}+\cos\dfrac{a_n}{3}=0$ となり，$e^{na_n}=2\left(1+\cos\dfrac{a_n}{3}\right)$ ………①

$n\geqq 1$ で $a_n>0$ から $1<e^{na_n}$，また $2\left(1+\cos\dfrac{a_n}{3}\right)\leqq 2(1+1)=4$ なので，①から，

$$1<e^{na_n}\leqq 4,\ 0<na_n\leqq\log 4$$

これより，$0<a_n\leqq\dfrac{\log 4}{n}$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ………②

(3)　①から，$na_n=\log 2\left(1+\cos\dfrac{a_n}{3}\right)=\log 2+\log\left(1+\cos\dfrac{a_n}{3}\right)$ となり，②より，

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\log 2+\log(1+1)=2\log 2=\log 4$$

［解　説］

数列の極限の問題です。不等式での評価を考える点がポイントです。なお，(1)で $f_n(3\pi)$ を調べたのは，$1+\cos\dfrac{a_n}{3}>0$ の確認のためです。

2

問題のページへ

(1)　$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ に対し，$f(1)=1+\alpha+\beta$，$f(i)=-1+i\alpha+\beta$

さて，$|f(1)-3|\leqq 1$ かつ $|f(i)-1|\leqq 3$ より，

$|\alpha+\beta-2|\leqq 1$………①，$|i\alpha+\beta-2|\leqq 3$………②

ここで，$u=\alpha+\beta-2$……③，$v=i\alpha+\beta-2$……④とおくと，①②より，

$|u|\leqq 1$………①$'$，$|v|\leqq 3$………②$'$

③④から，$\alpha(1-i)=u-v$ となり，$\alpha=\dfrac{u-v}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}u-\dfrac{1+i}{2}v$ であるので，

$$f(1+i)=(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta=2i+\alpha+(i\alpha+\beta)$$

$$=2i+\frac{1+i}{2}u-\frac{1+i}{2}v+(v+2)=\frac{1+i}{2}u+\frac{1-i}{2}v+2+2i\text{………⑤}$$

すると，$f(1+i)-(2+2i)=\dfrac{1+i}{2}u+\dfrac{1-i}{2}v$ となり，

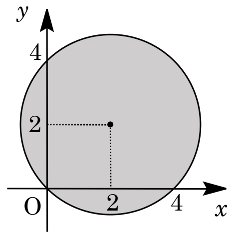
$$|f(1+i)-(2+2i)|=\left|\frac{1+i}{2}u+\frac{1-i}{2}v\right|\leqq\left|\frac{1+i}{2}u\right|+\left|\frac{1-i}{2}v\right|\text{………⑥}$$

ここで，$\left|\dfrac{1+i}{2}\right|=\left|\dfrac{1-i}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，①$'$ ②$'$を用いると，

$$\left|\frac{1+i}{2}u\right|+\left|\frac{1-i}{2}v\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right||u|+\left|\frac{1-i}{2}\right||v|\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3=2\sqrt{2}\text{………⑦}$$

したがって，⑥⑦より，

$|f(1+i)-(2+2i)|\leqq 2\sqrt{2}$



これより，複素数平面上で，$f(1+i)$ は中心 $2+2i$ で半径 $2\sqrt{2}$ の円の周上または内部を動く。図示すると，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。

(2)　$f(1+i)=0$ のとき，⑤より $\dfrac{1+i}{2}u+\dfrac{1-i}{2}v+2+2i=0$………⑧

そして，$|f(1+i)-(2+2i)|=2\sqrt{2}$ から，⑥⑦の等号成立条件より，$k>0$ として，

$\dfrac{1-i}{2}v=k\cdot\dfrac{1+i}{2}u$，$|u|=1$，$|v|=3$

すると，$\left|\dfrac{1-i}{2}\right||v|=k\left|\dfrac{1+i}{2}\right||u|$ から $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3=k\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$ となり，$k=3$ である。

これより，$\dfrac{1-i}{2}v=3\cdot\dfrac{1+i}{2}u$ となり，⑧に代入すると，

$\dfrac{1+i}{2}u+3\cdot\dfrac{1+i}{2}u+2+2i=0$，$2(1+i)u+2+2i=0$

よって，$u=-1$ となり，$v=3\cdot\dfrac{1+i}{1-i}u=\dfrac{3}{2}(1+i)^2u=3iu=-3i$ である。

すると，③④から，$\alpha=\dfrac{1+i}{2}\cdot(-1)-\dfrac{1+i}{2}\cdot(-3i)=-2+i$

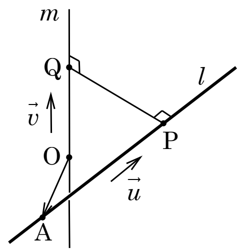
$\beta=-1-(-2+i)+2=3-i$

［解 説］

複素数平面と図形の問題です。上の解では，⑤式と$|u| \leqq 1$，$|v| \leqq 3$を見比べ，三角不等式が思い浮かびました。もっとも久々の登場でしたが……。

3

問題のページへ



点$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$を通り方向ベクトル$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$の直線$l$は，$t$を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(a,\ b,\ c)$$

また，直線 m を原点を通り方向ベクトル$\vec{v}=(0,\ 0,\ 1)$の直線としても一般性を失わないので，mはsを実数として，

$$(x,\ y,\ z)=s(0,\ 0,\ 1)$$

これより，l 上の任意の点を$\mathrm{P}(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct)$，$m$ 上の任意の点を$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ s)$とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct-s)$$

さて，lとmがねじれの位置にあるとき，lはmと交わらないことから$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$であり，また$\vec{u}$と$\vec{v}$が平行でないことより$a^2+b^2\neq 0$となる。

ここで，$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$のもとで，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$とすると，

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct-s)=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$z_0+ct-s=0\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入して，$a(x_0+at)+b(y_0+bt)=0$から，$(a^2+b^2)t=-(ax_0+by_0)$

すると，$a^2+b^2\neq 0$から，

$$t=-\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^2},\quad s=z_0+ct=z_0-\frac{c(ax_0+by_0)}{a^2+b^2}$$

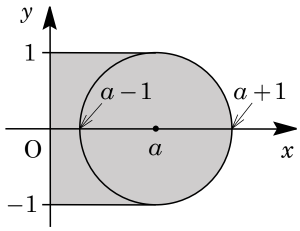
これより，tとsはただ1つ決まり，$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{QP}}$，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{QP}}$から，$l$と$m$の両方に直交する直線はただ1つ存在する。

［解　説］

ねじれの位置にある 2 直線の共通垂線が題材の問題です。文系問題の設定を流用して，直線mをz軸にしています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$a>1$ のとき，点$(a,\ 0)$を中心とする半径 1 の円 C は，

$$(x-a)^2+y^2=1\,,\ \ x=a\pm\sqrt{1-y^2}$$

円 C の $x \geqq a$ の部分は $x=a+\sqrt{1-y^2}$ と表せ，この半円と y 軸および 2 直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 は，

$$V_1=2\pi\int_0^1\left(a+\sqrt{1-y^2}\right)^2dy=2\pi\int_0^1\left(a^2+1-y^2+2a\sqrt{1-y^2}\right)dy$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}$ なので，

$$V_1=2\pi\left(a^2+1-\frac{1}{3}+2a\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\pi\left(2a^2+\pi a+\frac{4}{3}\right)$$

(2)　円 C の $x \geqq a$ の部分は $x=a-\sqrt{1-y^2}$ と表せるので，円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 は，

$$V_2=2\pi\int_0^1\left(a+\sqrt{1-y^2}\right)^2dy-2\pi\int_0^1\left(a-\sqrt{1-y^2}\right)^2dy$$

$$=2\pi\int_0^1 4a\sqrt{1-y^2}\,dy=8\pi a\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi^2a$$

さて，$V_1=2V_2$ とすると，$\pi\left(2a^2+\pi a+\dfrac{4}{3}\right)=4\pi^2a$ となり，

$$2a^2+\pi a+\frac{4}{3}=4\pi a\,,\ \ 6a^2-9\pi a+4=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(a)=6a^2-9\pi a+4$ とおくと $f(1)=10-9\pi<0$ となり，$(*)$を満たす a は，$a>1$ より $a=\dfrac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}$ である。

［解　説］

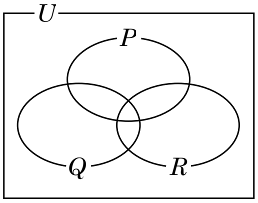
回転体の体積についての基本題です。計算も穏やかです。

5

問題のページへ

(1)　自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対し，$n = p^a q^b r^c$ とする。

n 以下の自然数の集合を U, その中で p の倍数の集合を P, q の倍数の集合を Q, r の倍数の集合を R とおき，その個数をそれぞれ $N(U)$，$N(P)$，$N(Q)$，$N(R)$ とすると，



$$N(U) = p^a q^b r^c,\ \ N(P) = \frac{p^a q^b r^c}{p} = p^{a-1} q^b r^c$$

$$N(Q) = \frac{p^a q^b r^c}{q} = p^a q^{b-1} r^c,\ \ N(R) = \frac{p^a q^b r^c}{r} = p^a q^b r^{c-1}$$

$$N(P\cap Q) = \frac{p^a q^b r^c}{pq} = p^{a-1} q^{b-1} r^c,\ \ N(Q\cap R) = \frac{p^a q^b r^c}{qr} = p^a q^{b-1} r^{c-1}$$

$$N(R\cap P) = \frac{p^a q^b r^c}{rp} = p^{a-1} q^b r^{c-1},\ \ N(P\cap Q\cap R) = \frac{p^a q^b r^c}{pqr} = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}$$

このとき，$N(P\cup Q\cup R)$ は,

$$\begin{aligned} N(P\cup Q\cup R) &= p^{a-1}q^b r^c + p^a q^{b-1} r^c + p^a q^b r^{c-1} \\ &\quad - p^{a-1}q^{b-1}r^c - p^a q^{b-1} r^{c-1} - p^{a-1} q^b r^{c-1} + p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1} \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(qr + pr + pq - r - p - q + 1) \end{aligned}$$

すると，$n = p^a q^b r^c$ と互いに素であるものの個数 $f(p^a q^b r^c)$ は,

$$\begin{aligned} f(p^a q^b r^c) &= N(\overline{P}\cap\overline{Q}\cap\overline{R}) = N(\overline{P\cup Q\cup R}) = N(U) - N(P\cup Q\cup R) \\ &= p^a q^b r^c - p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(qr + pr + pq - r - p - q + 1) \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(pqr - pq - qr - rp + p + q + r - 1) \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned}$$

(2)　$5 \leqq n \leqq 100$ のとき，$f(n)$ が n の約数となるのは, (1)から,

(i)　$n = p^a$ のとき　$f(n) = p^{a-1}(p-1)$

$p^{a-1}(p-1)$ が p^a の約数となるのは,

$$\frac{p^a}{p^{a-1}(p-1)} = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} \text{ が自然数 } \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，①から $p-1=1$ すなわち $p=2$ となり，$5 \leqq n \leqq 100$ である n は,

$$2^3 = 8,\ \ 2^4 = 16,\ \ 2^5 = 32,\ \ 2^6 = 64$$

(ii)　$n = p^a q^b$ $(p < q)$ のとき　$f(n) = p^{a-1}q^{b-1}(p-1)(q-1)$

$p^{a-1}q^{b-1}(p-1)(q-1)$ が $p^a q^b$ の約数となるのは,

$$\frac{p^a q^b}{p^{a-1}q^{b-1}(p-1)(q-1)} = \frac{pq}{(p-1)(q-1)} \text{ が自然数 } \cdots\cdots\cdots ②$$

$p-1$ と p は互いに素，$q-1$ と q は互いに素であり,

$$1 \leqq p-1 < p \leqq q-1 < q < pq$$

そこで，q は奇数，$q-1$ は偶数であることに注意すると，②から $p=q-1$ となり，$(p,\ q)=(2,\ 3)$ である。これより $5\leqq n\leqq 100$ である n は，

$$2^1\cdot 3^1=6,\ 2^1\cdot 3^2=18,\ 2^1\cdot 3^3=54,\ 2^2\cdot 3^1=12,\ 2^2\cdot 3^2=36,$$
$$2^3\cdot 3^1=24,\ 2^3\cdot 3^2=72,\ 2^4\cdot 3^1=48,\ 2^5\cdot 3^1=96$$

(iii) $n=p^aq^br^c\ (p<q<r)$ のとき　$f(p^aq^br^c)=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$

$p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$ が $p^aq^br^c$ の約数となるのは，

$$\frac{p^aq^br^c}{p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)}=\frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)} \text{ が自然数} \quad \cdots\cdots③$$

$p-1$ と p は互いに素，$q-1$ と q は互いに素，$r-1$ と r は互いに素であり，

$$1\leqq p-1<p\leqq q-1<q\leqq r-1<r<pqr$$

そこで，q と r はともに奇数，$q-1$ と $r-1$ はともに偶数であることに注意すると，③は成り立たないので，$f(n)$ は n の約数とならない。

(iv) n が相異なる 4 つ以上の素数で素因数分解されるとき
$n\geqq 2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^1=210$ より，$5\leqq n\leqq 100$ を満たさない。

(i)～(iv)より，求める自然数 n は，

6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96

［解　説］

難度の高い整数問題です。(1)は集合の要素の個数を問うもので，(2)へと繋がっています。なお，(2)は場合分けをした後，いろいろな処理方法が考えられます。