1

解答解説のページへ

曲線 $y=\left|x^2-1\right|$ を C, 直線 $y=2a(x+1)$ を l とする。ただし, a は $0<a<1$ を満たす実数とする。

(1)　曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間内の直線 l と z 軸はねじれの位置にあるとする。l と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

3

解答解説のページへ

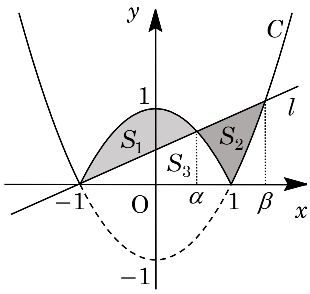
素数を小さい順に並べて得られる数列を，p_1，p_2，…，p_n，…とする。

(1)　p_{15} の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 12$ のとき，不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ



(1)　曲線 $C: y=|x^2-1|$ に対して,

$y=x^2-1\ (x\leqq -1,\ 1\leqq x)$ ………①

$y=-x^2+1\ (-1<x<1)$ ………②

さて, C と直線 $l: y=2a(x+1)$ ……③の共有点は,

①③から, $x^2-1=2a(x+1)$, $(x+1)(x-1-2a)=0$

$x=-1$, $x=2a+1$

$x=-1$ のとき $y=0$, また $x=2a+1$ は $0<a<1$ から $2a+1\geqq 1$ を満たし, このとき $y=2a(2a+1+1)=4a^2+4a$ となる。

また, ②③から, $-x^2+1=2a(x+1)$, $(x+1)(x-1+2a)=0$

$x=-2a+1$ （$0<a<1$ から $-1<-2a+1<1$ を満たしている）

このとき, $y=2a(-2a+1+1)=-4a^2+4a$ となる。

以上より, C と l の共有点の座標は, $\alpha=-2a+1$, $\beta=2a+1$ から,

$(-1,\ 0)$, $(-2a+1,\ -4a^2+4a)$, $(2a+1,\ 4a^2+4a)$

(2)　右上図のように, C と l で囲まれた 2 つの部分の面積を S_1, S_2 とし, $-1\leqq x\leqq 1$ において C と l と x 軸で囲まれた部分の面積を S_3 とおく。

$$S_1+S_3=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}S_2+S_3&=\int_{-1}^{2a+1}\{2a(x+1)-(x^2-1)\}dx-(S_1+S_3)\\&=-\int_{-1}^{2a+1}(x+1)(x-1-2a)dx-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}(2a+1+1)^3-\frac{4}{3}\\&=\frac{4}{3}(a+1)^3-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

ここで, $S_1=S_2$ から $S_1+S_3=S_2+S_3$ となり, $\frac{4}{3}=\frac{4}{3}(a+1)^3-\frac{4}{3}$ より,

$(a+1)^3=2$, $a+1=\sqrt[3]{2}$

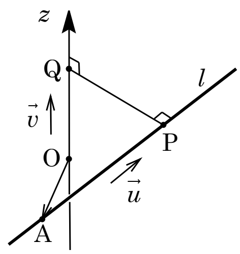
したがって, $a=\sqrt[3]{2}-1$ であり, この値は $0<a<1$ を満たしている。

［解　説］

定積分と面積についての頻出題です。いわゆる 1/6 公式を利用して, 具体的な積分計算を省略するところがポイントです。

2

問題のページへ



点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，方向ベクトル $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ の直線 l は，t を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(a,\ b,\ c)$$

方向ベクトル $\vec{v}=(0,\ 0,\ 1)$ の z 軸は，s を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=s(0,\ 0,\ 1)$$

すると，l 上の任意の点を $\mathrm{P}(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct)$，$z$ 軸上の任意の点を $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ s)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct-s)$$

さて，l と z 軸がねじれの位置にあるとき，l は z 軸と交わらないことから $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ であり，また $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行でないことより $a^2+b^2\neq 0$ となる。

ここで，$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ のもとで，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$ とすると，

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct-s)=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$z_0+ct-s=0\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入して，$a(x_0+at)+b(y_0+bt)=0$ から，$(a^2+b^2)t=-(ax_0+by_0)$

すると，$a^2+b^2\neq 0$ から，

$$t=-\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^2},\ \ s=z_0+ct=z_0-\frac{c(ax_0+by_0)}{a^2+b^2}$$

これより，t と s はただ 1 つ決まり，$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{QP}}$，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ から，l と z 軸の両方に直交する直線はただ 1 つ存在する。

［解　説］

ねじれの位置にある 2 直線の共通垂線が題材の問題です。設定をどのようにするかということが，最大のポイントです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　素数を小さい順に並べると,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \cdots$$

この数列を，p_1，p_2，…，p_n，…とすると，$p_{15}=47$ である。

(2)　$n \geqq 12$ のとき，$p_n > 3n$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=12$ のとき　$p_{12}=37$ より，$p_{12} > 3\times 12$ となり成り立っている。

(ii)　$n=k$ のとき　$p_k > 3k$ が成り立つと仮定する。

このとき，$p_k \geqq 3k+1$ であり，3 以上の素数は奇数なので,

$$p_{k+1} \geqq p_k + 2 \geqq 3k+1+2 = 3(k+1)$$

ところが，$p_{k+1} = 3(k+1)$ の場合は，p_{k+1} は 3 の倍数なので素数ではない。

すると，$p_{k+1} > 3(k+1)$ となり，$n=k+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$n \geqq 12$ のとき，$p_n > 3n$ が成り立つ。

［解 説］

素数を題材とした不等式の証明問題です。ただ，帰納法を用いると，予想以上にあっさりと示せました。