1

問題のページへ

(1) 条件より，$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$なので,

$a=r\cos\theta$ ………①，$1=r\sin\theta$ ………②

①②より，$a^2+1=r^2$ となり，$r>0$ から，$r=\sqrt{a^2+1}$

$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(2) 1 次変換 f によって，平面上の点は，原点のまわりに θ だけ回転し，さらに原点との距離が r 倍となる点に移るので，$Q_1(1,\ 0)$ に対し，$Q_{n+1}=f(Q_n)$ から，

$Q_n(r^{n-1}\cos(n-1)\theta,\ r^{n-1}\sin(n-1)\theta)$

すると，$\triangle OQ_nQ_{n+1}$ の面積 $S(n)$ は, (1)より,

$$S(n)=\frac{1}{2}r^{n-1}r^n|\sin\theta|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+1}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}(a^2+1)^{n-1}$$

(3) $A^{-1}=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ より，$A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} 2\cos\theta+7\sin\theta \\ -2\sin\theta+7\cos\theta \end{pmatrix}$ となり，条件から，

$$\frac{3}{2}\leqq\frac{1}{r}(2\cos\theta+7\sin\theta)<\frac{5}{2}$$

(1)より，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{7}{\sqrt{a^2+1}}\right)<\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{2a+7}{a^2+1}<\dfrac{5}{2}$ であるので,

$3a^2+3\leqq4a+14$ ………③，$5a^2+5>4a+14$ ………④

③より，$3a^2-4a-11\leqq0$ となり，$a>0$ なので，$0<a\leqq\dfrac{2+\sqrt{37}}{3}$

④より，$5a^2-4a-9>0$，$(5a-9)(a+1)>0$ となり，$a>0$ なので，$a>\dfrac{9}{5}$

すると，$\dfrac{8}{3}<\dfrac{2+\sqrt{37}}{3}<3$ から，③④を満たす自然数 a は，$a=2$ である。

このとき $S(n)>10^{10}$ から，$\dfrac{1}{2}\cdot5^{n-1}>10^{10}$，$5^n>10^{11}$ となり，両辺の対数をとって,

$n(\log_{10}5)>11$，$n(1-\log_{10}2)>11$，$n>\dfrac{11}{1-\log_{10}2}$ ………⑤

ここで，$0.3<\log_{10}2<0.31$ から，$15.7<\dfrac{11}{0.7}<\dfrac{11}{1-\log_{10}2}<\dfrac{11}{0.69}<16$

よって，⑤を満たす最小の n は $n=16$ である。

[解 説]

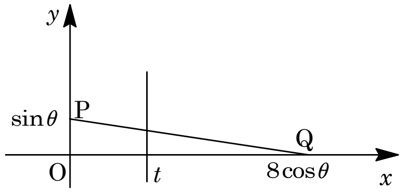
相似変換が題材となっています。この意味を考えると，A^n の計算は，必要不可欠ではありません。

2　問題のページへ

まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，$x=0$　$(0\leqq y\leqq 1)$ である。

また，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，

$$y=-\frac{\tan\theta}{8}x+\sin\theta\quad(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$$



さて，直線 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 8\cos\theta)$ 上における y のとりうる値の範囲を求める。

ここで，$f(\theta)=-\dfrac{t}{8}\tan\theta+\sin\theta$ とおくと，

$$f'(\theta)=-\frac{t}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos\theta=\frac{8\cos^3\theta-t}{8\cos^2\theta}$$

すると，$0\leqq t\leqq 8\cos\theta$ から $0\leqq\sqrt[3]{t}\leqq 2\sqrt[3]{\cos\theta}$ となり，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}$ となる α がただ 1 つ存在する。また，$8\cos\beta=t$ $\left(\cos\beta=\dfrac{t}{8}\right)$ とおくと，$\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}\geqq\dfrac{t}{8}$ から，$\alpha\leqq\beta$ である。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

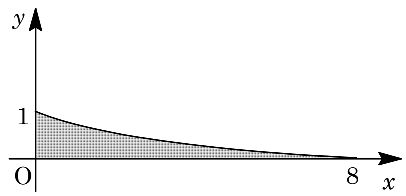
これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，

$$f(\alpha)=-\frac{t}{8}\tan\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha\left(-\frac{t}{8\cos\alpha}+1\right)=\sqrt{1-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}}\left(-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}+1\right)$$

$$=\frac{\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{4-t^{\frac{2}{3}}}{4}=\frac{1}{8}\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって，線分 PQ が通過する部分 D は，

$$0\leqq y\leqq\frac{1}{8}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



したがって，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^8\frac{1}{64}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{\pi}{64}\int_0^8\left(64-48x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\left[64x-48\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+12\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^8=\frac{\pi}{64}\left(2^9-\frac{9}{5}\cdot 2^9+\frac{9}{7}\cdot 2^9-\frac{1}{3}\cdot 2^9\right)$$

$$=2^3\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

[解 説]

線分の通過領域を求める際に，1 文字を固定して処理する有名問題です。なお，定積分の数値計算が面倒なので，変数を取り直した方がよかったかもしれません。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x-p)^2+q$ に対して，条件から，$f(0)=1$ となり，$p^2+q=1$ ………①

次に，$y=f(x)$ と $y=x$ を連立して，

$$(x-p)^2+q=x\ ,\ x^2-(2p+1)x+p^2+q=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x>0$ で，$y=f(x)$ と $y=x$ が接することより，$f(x)=x$ は正の重解をもち，

$$D=(2p+1)^2-4(p^2+q)=0\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ 2p+1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$(2p+1)^2=4$ となり，④から，$2p+1=2$，$p=\dfrac{1}{2}$

①に代入すると，$q=\dfrac{3}{4}$ となり，このとき②の重解は，$x=\dfrac{2p+1}{2}=1$

よって，接点の座標は，$(1,\ 1)$ である。

(2)　$g(x)=f_2(x)-f_1(x)$ とおくと，条件より $g(\alpha)>0$ かつ $g(\beta)>0$ であり，

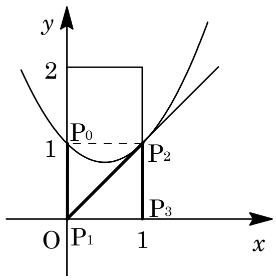
$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1=-2(p_2-p_1)x+{p_2}^2-{p_1}^2+q_2-q_1$$

(i)　$p_2\geqq p_1$ のとき　$g(x)$ は単調に減少し，$\alpha<x<\beta$ において，$g(x)\geqq g(\beta)>0$

(ii)　$p_2<p_1$ のとき　$g(x)$ は単調に増加し，$\alpha<x<\beta$ において，$g(x)\geqq g(\alpha)>0$

(i)(ii)より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において $f_1(x)<f_2(x)$ が成り立つ。

(3)　点 $(0,\ 1)$ を通り，直線 $y=x$ と点 $(1,\ 1)$ で接する放物線は，(1)より，

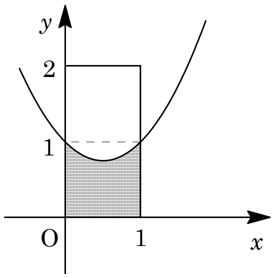


$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+1$$

この放物線を $y=f_1(x)$ とおき，放物線 $y=f(x)$ が，不等式 $1=f_1(0)<f(0)$ かつ $1=f_1(1)<f(1)$ を満たすとすると，(2)より，$y=f(x)$ は折れ線 L と共有点をもたない。

また，$f(0)<f_1(0)$ または $f(1)<f_1(1)$ が満たされるとき，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ は，折れ線 L と共有点をもつ。

そこで，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ を，折れ線 L と共有点がないように動かすとき，$y=f(x)$ が通過する領域は，$y=f_1(x)$ の上部全体となる。



したがって，長方形 R から，上記の通過領域 T を除いた領域 S を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含む。また，この領域 S の面積は，

$$\int_0^1(x^2-x+1)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

[解　説]

(3)の論理展開は感覚的すぎると思いながらも，この程度の記述に留めました。

4

問題のページへ

(1)　三角不等式を用いて，$|px+q| \leqq |px|+|q| = |p||x|+|q|$ ………①

また, $x \geqq 1$ であれば,

$$|p||x|+|q| = |p|x+|q| \leqq |p|x+|q|x = (|p|+|q|)x \text{ ………②}$$

そこで，$|p|+|q| = r$ とおくと，①②より，$|px+q| \leqq rx$ となる。

(2)　まず，$f(x)-(x+k)^3 = (x^3+ax^2+bx+c)-(x+k)^3$

$$= (a-3k)x^2+(b-3k^2)x+(c-k^3)$$

$k = \dfrac{a}{3} > 0$ の場合は，$\left|f(x)-(x+k)^3\right| = \left|\left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)x+\left(c-\dfrac{a^3}{27}\right)\right|$

そこで, $x \geqq 1$ のとき，$\left|b-\dfrac{a^2}{3}\right|+\left|c-\dfrac{a^3}{27}\right| = l$ とおくと, (1)より,

$$\left|f(x)-(x+k)^3\right| \leqq lx \text{ ………③}$$

また, a, b, c は正の定数より，$x \geqq 1$ のとき,

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2+\sqrt[3]{f(x)}(x+k)+(x+k)^2 \geqq \left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2+\sqrt[3]{x^3}\cdot x+x^2 \geqq x^2 \text{ ………④}$$

③④より,

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| = \frac{\left|f(x)-(x+k)^3\right|}{\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2+\sqrt[3]{f(x)}(x+k)+(x+k)^2} \leqq \frac{lx}{x^2} = \frac{l}{x}$$

(3)　正の数 k の整数部分を $[k]$，小数部分を α とすると，$0 \leqq \alpha < 1$ である。

さて, (2)より，すべての自然数 n に対して,

$$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]-\alpha\right| \leqq \frac{l}{n},\ \ \alpha-\frac{l}{n} \leqq \sqrt[3]{f(n)}-n-[k] \leqq \alpha+\frac{l}{n} \text{ ………⑤}$$

また，区間 $I_n : \alpha-\dfrac{l}{n} \leqq x \leqq \alpha+\dfrac{l}{n}$ とおくと，$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ となる。

(i)　$0 < \alpha < 1$ のとき

区間 $J : 0 < x < 1$ とすると，$n \geqq n_0$ において $J \supset I_n$ となる n_0 が存在する。しかし, $\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]$ は整数であることから，⑤は成立しない。

(ii)　$\alpha = 0$ のとき

⑤より，$-\dfrac{l}{n} \leqq \sqrt[3]{f(n)}-n-[k] \leqq \dfrac{l}{n}$ ………⑥

ここで，$[k] = m > 0$ とおくと，十分大きな n に対しても⑥が成立することより,

$$\sqrt[3]{f(n)}-n-m = 0,\ \ f(n) = (n+m)^3 \text{ ………⑦}$$

すると, 3 次関数 $f(x)$ に対し，任意の自然数 n に対して⑦が成立するので,

$$f(x) = (x+m)^3$$

[解　説]

(3)は, k が整数であることを示すのがポイントですが，その記述方法は……。

5

問題のページへ

(1)　漸化式 $a_1=0$，$a_2=r$，$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1})$　$(n\geqq 2)$ ……①に対して,

$$r_n=\frac{r}{2}\ \text{(硬貨を投げ表がでたとき)}$$

$$r_n=\frac{1}{2r}\ \text{(硬貨を投げ裏がでたとき)}$$

まず, 硬貨を 1 回投げ表がでたとき，$a_3=a_2+\frac{r}{2}(a_2-a_1)=r+\frac{r}{2}\cdot r=r+\frac{r^2}{2}$

また, 硬貨を 1 回投げ裏がでたとき，$a_3=a_2+\frac{1}{2r}(a_2-a_1)=r+\frac{1}{2r}\cdot r=r+\frac{1}{2}$

よって，a_3 の期待値 p_3 は,

$$p_3=\frac{1}{2}\left(r+\frac{r^2}{2}+r+\frac{1}{2}\right)=\frac{r^2}{4}+r+\frac{1}{4}$$

さらに，もう一度, 硬貨を投げると,

(i)　表→表のとき　$a_4=a_3+\frac{r}{2}(a_3-a_2)=r+\frac{r^2}{2}+\frac{r}{2}\cdot\frac{r^2}{2}=r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{4}$

(ii)　表→裏のとき　$a_4=a_3+\frac{1}{2r}(a_3-a_2)=r+\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2r}\cdot\frac{r^2}{2}=\frac{5}{4}r+\frac{r^2}{2}$

(iii)　裏→表のとき　$a_4=a_3+\frac{r}{2}(a_3-a_2)=r+\frac{1}{2}+\frac{r}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}r$

(iv)　裏→裏のとき　$a_4=a_3+\frac{1}{2r}(a_3-a_2)=r+\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}\cdot\frac{1}{2}=r+\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}$

よって，a_4 の期待値 p_4 は,

$$\begin{aligned}p_4&=\frac{1}{4}\left(r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{4}+\frac{5}{4}r+\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}r+r+\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}\right)\\&=\frac{r^3}{16}+\frac{r^2}{4}+\frac{9}{8}r+\frac{1}{4}+\frac{1}{16r}\end{aligned}$$

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ ……②とおくと，$b_1=r-0=r$ で，①から，$b_n=r_nb_{n-1}$ となり,

$$b_n=b_1\cdot r_2r_3\cdots r_n=r\cdot r_2r_3\cdots r_n\quad(n\geqq 2)$$

ところで, 硬貨を $n-1$ 回投げたとき, 表が k 回, 裏が $n-1-k$ 回でたとすると,

$$b_n=r\left(\frac{r}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2r}\right)^{n-1-k}=\frac{r^{2k-n+2}}{2^{n-1}}$$

また, このときの確率は，${}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}={}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる。

そこで，b_n の期待値を q_n とするとき,

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r^{2k-n+2}}{2^{n-1}}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{r^{-n+2}}{4^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\,r^{2k}=\frac{r}{(4r)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\,r^{2k}\\&=\frac{r}{(4r)^{n-1}}(1+r^2)^{n-1}=r\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

なお, この式は $n=1$ のときも成立する。

さて, ②に対して, 両辺の期待値をとると，$q_n=p_{n+1}-p_n$ ………③

$p_1=0$ なので，③より，

$$p_n=p_1+\sum_{i=1}^{n-1}q_i=r\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{i-1}\quad(n\geqq 2)$$

(i)　$\dfrac{1}{4r}+\dfrac{r}{4}\neq 1$　$(r\neq 2\pm\sqrt{3})$ のとき

$$p_n=r\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)}=\frac{-4r^2}{r^2-4r+1}\left\{1-\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

(ii)　$\dfrac{1}{4r}+\dfrac{r}{4}=1$　$(r=2\pm\sqrt{3})$ のとき

$$p_n=r(n-1)$$

(3)　数列 $\{p_n\}$ が収束する条件は，$r>0$ から，

(i)　$r\neq 2\pm\sqrt{3}$ のとき

$\dfrac{1}{4r}+\dfrac{r}{4}<1$，すなわち $r^2-4r+1<0$ より，$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$

(ii)　$r=2\pm\sqrt{3}$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\infty$ より，不適である。

(i)(ii)より，求める条件は，$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$

(4)　(3)のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{-4r^2}{r^2-4r+1}=\frac{4}{-1+\frac{4}{r}-\frac{1}{r^2}}=\frac{4}{-\left(\frac{1}{r}-2\right)^2+3}$

ここで，$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$ より，$2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}<\dfrac{1}{r}<\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ となり，

$$0<-\left(\frac{1}{r}-2\right)^2+3\leqq 3$$

したがって，$\dfrac{1}{r}=2\ \left(r=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

[解　説]

③式は,「和の期待値は期待値の和」という考え方を用いています。阪大の出題範囲からすると，掟破りですが。