

1

問題のページへ

(1) $f(x) = 2\log(1+e^x) - x - \log 2$ に対して, $f'(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} - 1$ となり,

$$f''(x) = \frac{2e^x(1+e^x) - 2e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって, $\log f''(x) = \log 2e^x - 2\log(1+e^x) = -2\log(1+e^x) + x + \log 2 = -f(x)$

(2) $I = \int_0^{\log 2} (x - \log 2)e^{-f(x)} dx$ とし, (1)の結果を適用すると,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log 2} (x - \log 2)e^{\log f''(x)} dx = \int_0^{\log 2} (x - \log 2) f''(x) dx \\ &= \left[(x - \log 2) f'(x) \right]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} f'(x) dx = (\log 2) f'(0) - \left[f(x) \right]_0^{\log 2} \\ &= -f(\log 2) + f(0) = -2\log 3 + \log 2 + \log 2 + (2\log 2 - \log 2) \\ &= -2\log 3 + 3\log 2 = \log \frac{8}{9} \end{aligned}$$

[解 説]

定積分の計算問題です。(1)の誘導によって, 方針は自然に決まります。

2

問題のページへ

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3 \dots\dots, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 2 \dots\dots$$

の交点の座標を求める。

まず、は、 $x^2 \sin^2\theta - y^2 \cos^2\theta = 2 \sin^2\theta \cos^2\theta$ となり、

と連立すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \sin^2\theta \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

ここで、 $\Delta = -\cos^2\theta - 3 \sin^2\theta = -1 - 2 \sin^2\theta < 0$ から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{1 + 2 \sin^2\theta} \begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -3 \\ -\sin^2\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \sin^2\theta \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + 2 \sin^2\theta} \begin{pmatrix} 3 \cos^2\theta + 6 \sin^2\theta \cos^2\theta \\ 3 \sin^2\theta - 2 \sin^2\theta \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + 2 \sin^2\theta} \begin{pmatrix} 3 \cos^2\theta (1 + 2 \sin^2\theta) \\ \sin^2\theta (1 + 2 \sin^2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos^2\theta \\ \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ であり、第 1 象限の交点 P は $P(\sqrt{3} \cos\theta, \sin\theta)$

となる。点 P における C_1 , C_2 の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とすると、

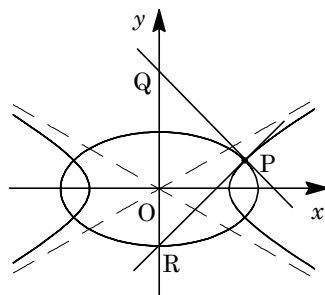
$$l_1 : \sqrt{3}x \cos\theta + 3y \sin\theta = 3, \quad l_2 : \frac{\sqrt{3}x}{\cos\theta} - \frac{y}{\sin\theta} = 2$$

y 軸と l_1 の交点は $Q(0, \frac{1}{\sin\theta})$, l_2 の交点は $R(0, -2 \sin\theta)$ となり、

$$QR = \frac{1}{\sin\theta} + 2 \sin\theta = 2 \sqrt{\frac{1}{\sin\theta} \cdot 2 \sin\theta} = 2\sqrt{2}$$

等号は、 $\frac{1}{\sin\theta} = 2 \sin\theta$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$) のときに成立する。

よって、QR の長さの最小値は $2\sqrt{2}$ である。



[解 説]

楕円周上の点をパラメータ表示することからスタートしました。延々と計算をして、結局、交点は $P(\sqrt{3} \cos\theta, \sin\theta)$ であることがわかり、書き直したのが上の解です。

3

問題のページへ

3以上の整数 l, m, n に対して, $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2 \dots\dots\dots$

まず, $l \geq 3$ から, $0 < \frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \leq \frac{2}{3}$ となり, $m > 0$ から左側の不等式は,

$$2n - mn + 2m > 0, \quad mn - 2m - 2n < 0, \quad (m-2)(n-2) < 4 \dots\dots\dots$$

すると, を満たす 3以上の整数 (m, n) は,

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$$

(i) $(m, n) = (3, 3)$ のとき $\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ となり, から, $l = 4$

(ii) $(m, n) = (3, 4)$ のとき $\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{3}$ となり, から, $l = 6$

(iii) $(m, n) = (3, 5)$ のとき $\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{6}$ となり, から, $l = 12$

(iv) $(m, n) = (4, 3)$ のとき $\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{4}$ となり, から, $l = 8$

(v) $(m, n) = (5, 3)$ のとき $\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{10}$ となり, から, $l = 20$

(i) ~ (v) より, を満たす 3以上の整数 (l, m, n) は,

$$(4, 3, 3), (6, 3, 4), (12, 3, 5), (8, 4, 3), (20, 5, 3)$$

[解 説]

見かけよりは扱いやすい不定方程式です。アバウトな評価で解の候補が絞れます。実際は, もっときつい評価をして進めましたが。

4

問題のページへ

条件より、球 T_1 、 T_2 の中心をそれぞれ $(0, 0, 0)$ 、 $(2, 0, 0)$ とすると、

$$T_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad T_2 : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

また、球 S の中心を (x_0, y_0, z_0) とおくと、

$$S : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = 1$$

さて、 S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接していることより、

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \leq 3-1, \quad \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \leq 4 \dots\dots\dots$$

また、 S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接していることより、

$$\sqrt{(x_0-2)^2 + y_0^2 + z_0^2} \geq 1+1, \quad \sqrt{(x_0-2)^2 + y_0^2 + z_0^2} \geq 4 \dots\dots\dots$$

よって、 S の中心が存在しうる範囲 D は、

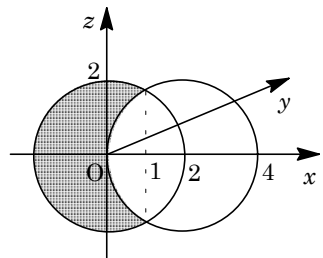
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \dots\dots\dots'$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 \geq 4 \dots\dots\dots'$$

ここで、平面 $x=k$ ($0 \leq k \leq 1$) で ' ' の共通範囲を切断すると、

$$y^2 + z^2 \leq 4-k^2 \dots\dots\dots'$$

$$y^2 + z^2 \geq 4-(k-2)^2 \dots\dots\dots'$$



これより、切り口は、 x 軸上に中心があり、外径が $\sqrt{4-k^2}$ 、内径が $\sqrt{4-(k-2)^2}$ のドーナツ形であり、その面積 $S(k)$ は、

$$S(k) = \pi(4-k^2) - \pi\{4-(k-2)^2\} = \pi(4-4k)$$

これより、立体 D の体積 V は、

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 + \int_0^1 S(k) dk = \frac{16}{3} \pi + \int_0^1 \pi(4-4k) dk = \frac{16}{3} \pi + 2\pi = \frac{22}{3} \pi$$

[解 説]

平面図形では頻出の内接と外接を題材にした問題です。対象が空間図形でも同じように考えることができます。なお、球面の方程式などについては「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

5

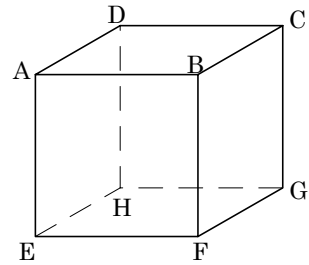
問題のページへ

- (1) 時刻 1 に, 点 P は A から B, D, E のいずれかに移動,
点 Q は C から B, D, G のいずれかに移動している。

これより, 異なる頂点に位置する (P, Q) は,

(B, D), (B, G), (D, B), (D, G)

(E, B), (E, D), (E, G)



- (2) まず, (1) から, P と Q が異なる頂点に位置するとき,
その位置は 1 つの面の対角線の両端である。

そこで, (P, Q) が異なる頂点に位置するとき, 1 回の移動で可能な $3^2 = 9$ 通りの (P, Q) の位置のうち, 異なる頂点であるのは, (1) から 7 通りである。

すると, 時刻 n において, P と Q が異なる頂点に位置する確率を r_n とすると,

$$r_{n+1} = \frac{7}{9} r_n, \quad r_n = r_0 \left(\frac{7}{9}\right)^n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

- (3) 時刻 n において, (P, Q) がともに上面 ABCD の異なる頂点か, またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置する状態を A_n とし, (P, Q) のいずれか一方が上面 ABCD, 他方が下面 EFGH の頂点に位置する状態を B_n とする。

すると, 状態 A_n である確率が p_n , 状態 B_n である確率が q_n である。

さて, (1) から, 状態 A_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, 状態 B_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{2}{9}$, これら以外の状態から状態 A_{n+1} への推移はないので,

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{9} q_n \dots\dots\dots$$

- (4) (2)(3) より, $p_n + q_n = r_n$ なので, $q_n = r_n - p_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n - p_n \dots\dots\dots$

$$\text{よ} \text{り}, p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{2}{9} p_n = \frac{1}{9} p_n + \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^n \text{ とな} \text{り},$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} = \frac{1}{9} \left\{ p_n - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^n \right\}$$

すると, $p_0 = 1$ から, $p_n - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \left\{ p_0 - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^0 \right\} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ となり, から,

$$p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n, \quad q_n = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$\text{よ} \text{つ} \text{て}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 7^n - 2}{7^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2 \cdot 7^{-n}}{1 + 2 \cdot 7^{-n}} = 2$$

[解 説]

問題文が長く, また答案の書きにくい問題です。(3)の状態 B_n からの推移確率については, 上面を AEFB, 下面を DHGC として見ると, (1)が利用できます。なお, 漸化式の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。