1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1 : x^2+3y^2=3,\quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち, x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1, C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とし, y 軸と l_1, l_2 の交点をそれぞれ Q, R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 線分 QR の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$l,\ m,\ n$ を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ を満たす $l,\ m,\ n$ の組をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

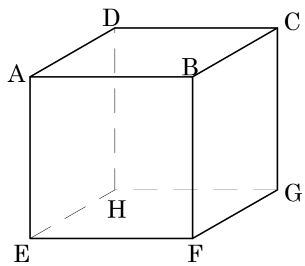
(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ



n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。

(1)　時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2)　時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3)　時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。