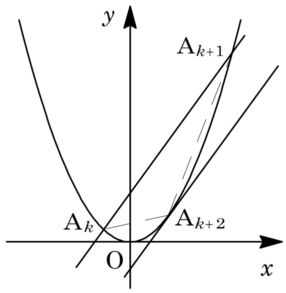
1

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2$ に対して，$y'=2x$

さて，条件より，3 点 $A_k(a_k,\ {a_k}^2)$，$A_{k+1}(a_{k+1},\ {a_{k+1}}^2)$，$A_{k+2}(a_{k+2},\ {a_{k+2}}^2)$ について，A_{k+2} における C の接線が直線 A_kA_{k+1} に平行であることから，

$$2a_{k+2}=\frac{{a_{k+1}}^2-{a_k}^2}{a_{k+1}-a_k}=a_{k+1}+a_k \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=(a_{k+1}-a_k,\ {a_{k+1}}^2-{a_k}^2)$

$$=(a_{k+1}-a_k)(1,\ a_{k+1}+a_k)$$

$$\overrightarrow{A_kA_{k+2}}=(a_{k+2}-a_k)(1,\ a_{k+2}+a_k)$$

すると，$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ の面積 T_k は，①を利用すると，

$$T_k=\frac{1}{2}\left|(a_{k+1}-a_k)(a_{k+2}-a_k)\{(a_{k+2}+a_k)-(a_{k+1}+a_k)\}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(a_{k+1}-a_k)(a_{k+2}-a_k)(a_{k+2}-a_{k+1})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(a_{k+1}-a_k)\left(\frac{1}{2}a_{k+1}+\frac{1}{2}a_k-a_k\right)\left(\frac{1}{2}a_{k+1}+\frac{1}{2}a_k-a_{k+1}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{8}\left|(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}-a_k)(-a_{k+1}+a_k)\right|=\frac{1}{8}\left|a_{k+1}-a_k\right|^3$$

$$T_{k+1}=\frac{1}{8}\left|a_{k+2}-a_{k+1}\right|^3=\frac{1}{8}\left|\frac{1}{2}a_{k+1}+\frac{1}{2}a_k-a_{k+1}\right|^3=\frac{1}{64}\left|a_{k+1}-a_k\right|^3$$

よって，$T_{k+1}=\frac{1}{8}T_k$ より，$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{1}{8}$ である。

(2)　(1)より，数列 $\{T_k\}$ は公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列であるので，$a_1<a_2$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{T_1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}T_1=\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{8}\left|a_2-a_1\right|^3=\frac{1}{7}(a_2-a_1)^3\cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線 A_1A_2 と C で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{a_1}^{a_2}-(x-a_1)(x-a_2)\,dx=\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{1}{7}\cdot 6S=\frac{6}{7}S$

[解　説]

三角形の面積に無限等比級数を組み合わせた標準的な 1 題です。

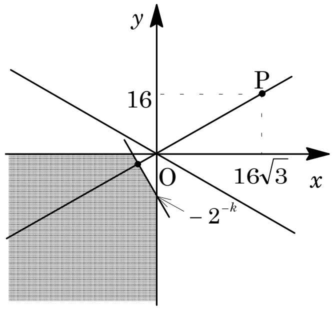
2

問題のページへ

まず，行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f は，任意の点を原点まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，さらに原点との距離を $\dfrac{1}{2}$ 倍にする変換である。

さて，$\mathrm{P}(16\sqrt{3},\ 16)$ から直線 OP と x 軸の正の部分となす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であることより，$\mathrm{P}_1=f(\mathrm{P})$，$\mathrm{P}_{n+1}=f(\mathrm{P}_n)$ で定義される点 P_n が存在するのは，

$$y=x\tan\frac{\pi}{6},\quad x=0,\quad y=-x\tan\frac{\pi}{6}$$



すると，網点部 D_k: $x<0$，$y<0$，$\sqrt{3}x+y\leqq -2^{-k}$ に含まれる P_n は，第 3 象限内の半直線 $y=x\tan\dfrac{\pi}{6}$ 上にあることがわかるので，この n の条件は, $l\geqq 1$ として,

$$n=6(l-1)+3=6l-3\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，P_n と原点との距離を d_n とおくと，

$$d_0=\mathrm{OP}=16\sqrt{3+1}=32,\quad d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n$$

これより，$d_n=32\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=2^{5-n}\ \cdots\cdots\cdots②$

そこで，P_n が半直線 $y=x\tan\dfrac{\pi}{6}\ (x<0)$ 上にあるときは，①②より，

$$d_n=2^{5-6l+3}=2^{8-6l}$$

さらに，直線 $\sqrt{3}x+y=-2^{-k}$ は，半直線 $y=x\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ と直交し，原点との距離 d は $d=\dfrac{2^{-k}}{\sqrt{3+1}}=2^{-k-1}$ から，P_n が D_k に含まれる条件は，$d_n\geqq d$ となり，

$$2^{8-6l}\geqq 2^{-k-1},\quad 8-6l\geqq -k-1,\quad l\leqq\frac{k+9}{6}\ \cdots\cdots\cdots③$$

そこで，一般的に x を超えない最大整数を $[\,x\,]$ で表すと，③より，D_k に含まれる P_n の個数は $\left[\ \dfrac{k+9}{6}\ \right]$ となる。

[解 説]

回転・拡大の相似変換を題材にした問題です。角と距離の条件を個別に考え，図形的に解いています。

3

問題のページへ

αは 2 次方程式$x^2-2x-1=0$の解より，$\alpha^2=2\alpha+1$となり，

$$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=ab+(5ac+5b)\alpha+25c(2\alpha+1)$$
$$=(ab+25c)+(5ac+5b+50c)\alpha$$

条件より，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$なので，

$$(ab+25c-1)+5(ac+b+10c)\alpha=0$$

ここで, a, b, cは整数，$\alpha=1\pm\sqrt{2}$は無理数より，

$$ab+25c-1=0\cdots\cdots\cdots①,\quad ac+b+10c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$b=-c(a+10)$となり，①に代入すると，

$$-ac(a+10)+25c-1=0,\quad c(-a^2-10a+25)=1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，③からcは 1 の約数となり，$c=\pm1$である。

(i)　$c=1$のとき

③より，$-a^2-10a+25=1$，$a^2+10a-24=0$，$(a+12)(a-2)=0$

$a=-12$のとき$b=-1\times(-2)=2$，$a=2$のとき$b=-1\times12=-12$となる。

(ii)　$c=-1$のとき

③より，$-a^2-10a+25=-1$，$a^2+10a-26=0$となり，整数解はない。

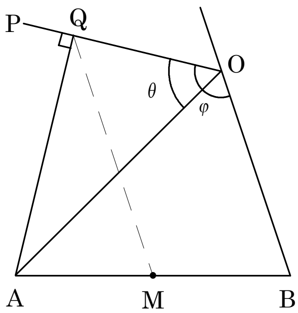
(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(-12,\ 2,\ 1)$，$(2,\ -12,\ 1)$

[解 説]

整数についての基本問題です。式も扱いやすく，計算量も少なめです。

4

問題のページへ



(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を φ とおく。

条件より，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ ………①

すると，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\varphi\leqq\pi$ となり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ から，①より，

$$\cos\theta=-\cos\varphi,\ \cos\theta=\cos(\pi-\varphi)$$

これより，$\theta=\pi-\varphi$ となり，OP は∠AOB の外角の二等分線である。

さて，点 Q は OP 上にあるので, k を正の定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{\vec{a}+(-\vec{b})\}=k(\vec{a}-\vec{b})\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=y$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から,

$$(k\vec{a}-k\vec{b}-x\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ k|\vec{a}-\vec{b}|^2-x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

これより，$k=\dfrac{x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\dfrac{x|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{x-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{x}{2}$ となり，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

そこで, M は辺 AB の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\vec{b}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行である。

(2)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\right||\vec{b}|=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$

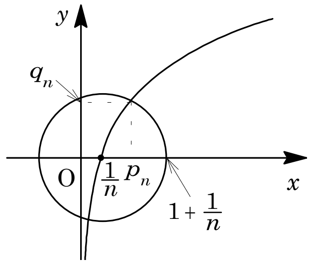
[解 説]

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるのに注目し，ひし形の対角線が角を二等分するという定理をベースにした解です。

5

問題のページへ

(1) 点 $(p_n,\ q_n)$ は，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の第 1 象限にある交点であるので,



$$q_n=\log(np_n)\cdots\cdots\cdots①$$

$$\left(p_n-\frac{1}{n}\right)^2+q_n{}^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$1-q_n{}^2=\left(p_n-\frac{1}{n}\right)^2=\dfrac{(np_n-1)^2}{n^2}\cdots\cdots\cdots③$

①より，$np_n=e^{q_n}$ から，$np_n-1=e^{q_n}-1\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$1-q_n{}^2=\dfrac{(e^{q_n}-1)^2}{n^2}$

ここで, $0<q_n\leqq 1$ から, $0<e^{q_n}-1\leqq e-1$ となり，$1-q_n{}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$

さらに, $0<q_n{}^2\leqq 1$ から，$0\leqq 1-q_n{}^2$ となり,

$$0\leqq 1-q_n{}^2\leqq\frac{(e-1)^2}{n^2}$$

すると, $n\to\infty$ のとき $1-q_n{}^2\to 0$ すなわち $q_n{}^2\to 1$ となり，$q_n>0$ から,

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1$$

(2) $S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx=\Big[x\log(nx)\Big]_{\frac{1}{n}}^{p_n}-\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}x\cdot\frac{1}{x}\,dx=p_n\log(np_n)-p_n+\frac{1}{n}$

(3) (2)の結果に④を適用すると,

$$nS_n=np_n\log(np_n)-np_n+1=q_ne^{q_n}-e^{q_n}+1=e^{q_n}(q_n-1)+1\cdots\cdots\cdots⑤$$

(1)から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=1$ なので，⑤より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n=1$ である。

[解 説]

ていねいな誘導のついた極限の問題です。この誘導がなければ難問です。