1

解答解説のページへ

放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ {a_1}^2)$，$\mathrm{A}_2(a_2,\ {a_2}^2)$，$\mathrm{A}_3(a_3,\ {a_3}^2)$，$\cdots$を，$\mathrm{A}_{k+2}$ $(k \geqq 1)$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし，$a_1 < a_2$ とする。三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。点 $\mathrm{P}(16\sqrt{3},\ 16)$ をとり，$\mathrm{P}_1=f(\mathrm{P})$，$\mathrm{P}_{n+1}=f(\mathrm{P}_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。正の整数 k に対して，次の条件を満たす領域を D_k とする。

$$x<0,\ y<0,\ \sqrt{3}x+y\leqq -2^{-k}$$

このとき，D_k に含まれる P_n の個数を k で表せ。

3

解答解説のページへ

α を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，必要ならば，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。

4

解答解説のページへ

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。

5

解答解説のページへ

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1) 不等式 $1-{q_n}^2 \leqq \dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=1$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2) $S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx$ を p_n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。