1

問題のページへ

(1)　条件より，$A_0=O$，$A_1=B+A_0C=B$

$$A_2=B+A_1C=B+BC=B(E+C)$$

$$A_3=B+A_2C=B+B(E+C)C=B(E+C+C^2)$$

これより，$n\geqq 1$ のとき，$A_n=B(E+C+\cdots+C^{n-1})$ ……①と推測できる。ただし，$C^0=E$ とする。以下，①を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$A_1=B=BE$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$A_k=B(E+C+\cdots+C^{k-1})$ と仮定する。

$$A_{k+1}=B+A_kC=B+B(E+C+\cdots+C^{k-1})C=B(E+C+C^2+\cdots+C^k)$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$A_n=B(E+C+\cdots+C^{n-1})$ となり，

$$A_n(E-C)=B(E+C+\cdots+C^{n-1})(E-C)=B(E-C^n)$$

(2)　(1)より，$A_{3n}(E-C)=B(E-C^{3n})$ ………②

さて，$C^2=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

$$C^3=-2\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}=-8\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-8E$$

よって，$C^{3n}=(-8)^nE=(-2)^{3n}E$

ここで，$E-C=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ から，$\det(E-C)=3$ となり，②から，

$$A_{3n}=B(E-C^{3n})(E-C)^{-1}=B\{1-(-2)^{3n}\}E(E-C)^{-1}$$

$$=\frac{1-(-2)^{3n}}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\-1&0\end{pmatrix}=\frac{1-(-2)^{3n}}{3}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

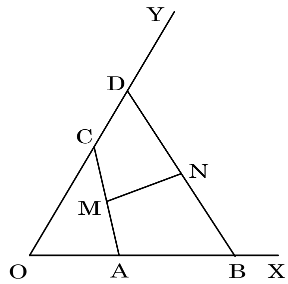
[解 説]

(1)では，方針に迷ったあげく，結局は，推測→帰納法という平凡な解き方を採用しました。

2

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\dfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって，$\mathrm{MN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2)　$s^2+t^2=1$ ($s>0$，$t>0$) より，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

すると，$\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$のとき，$s^2+st+t^2$ は最大値$\dfrac{3}{2}$をとる。

よって, (1)より, MN の最大値は$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$である。

[解 説]

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお, (2)では, 相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(N-x)\log x$ に対して，$f'(x)=-\log x+\dfrac{N-x}{x}=-\log x+\dfrac{N}{x}-1$

$$f''(x)=-\frac{1}{x}-\frac{N}{x^2}=-\frac{x+N}{x^2}<0$$

これより, $1\leqq x\leqq N$ において，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である。

また，$f'(x)$ の増減は右表のようになり，

x	1	$\cdots$	N
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		↘	

$$f'(1)=N-1>0,\ f'(N)=-\log N<0$$

すると，$f'(x)=0$ はただ 1 つの解をもつ。

これを $x=\alpha$ $(1<\alpha<N)$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は極大値を 1 つだけもつ。

x	1	$\cdots$	α	$\cdots$	N
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

(2)　$f(n)=(N-n)\log n=\log n^{N-n}$ より，

$$a_n=n^{N-n}=e^{f(n)}$$

ここで，l を $1\leqq l\leqq N-1$ を満たす自然数とし，$l\leqq\alpha\leqq l+1$ とする。さらに，一般的に, a と b の小さくない方を $\max\{a,\ b\}$ で表すと，

$$M=\max\{e^{f(l)},\ e^{f(l+1)}\}=\max\{a_l,\ a_{l+1}\}$$

よって，$M=a_n$ となる n の個数 k は, $k\leqq 2$ である。

(3)　$k=2$ となるのは，$l<\alpha<l+1$ において，$a_l=a_{l+1}$ の場合より，

$$l^{N-l}=(l+1)^{N-l-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, l と $l+1$ は連続する自然数より，偶奇が異なる。

(i)　$N-l-1\geqq 1$ $(N-l\geqq 2)$ のとき

$(*)$は，両辺の偶奇が異なることより成立しない。

(ii)　$N-l-1=0$ $(N-l=1)$ のとき

$(*)$より，$l=1$ すなわち $N=2$ である。

このとき，$a_n=n^{2-n}$ から $a_1=a_2=1$ となり，$k=2$ である。

(i)(ii)より，$k=2$ となるのは，$N=2$ のときだけである。

[解 説]

$f(x)$ のグラフは書いていませんが，これをイメージして解いています。(3)は，(1)と(2)の延長線上では解決できない点が難です。

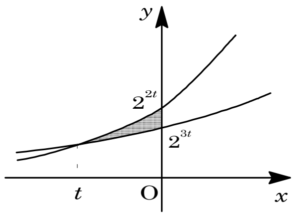
4

問題のページへ

(1)　2 曲線 $y=2^{2x+2t}$ ……①と $y=2^{x+3t}$ ……②の交点は,

$$2^{2x+2t}=2^{x+3t},\ \ 2x+2t=x+3t$$

よって，$x=t$ となる。



そこで，2 曲線①と②および y 軸で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ は，$t<0$ から,

$$V(t)=\pi\int_t^0 2^{2(2x+2t)}dx-\pi\int_t^0 2^{2(x+3t)}dx=\frac{\pi}{\log 2}\Big[\frac{1}{4}\cdot 2^{4x+4t}-\frac{1}{2}\cdot 2^{2x+6t}\Big]_t^0$$

$$=\frac{\pi}{\log 2}\Big\{\frac{1}{4}(2^{4t}-2^{8t})-\frac{1}{2}(2^{6t}-2^{8t})\Big\}=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2\cdot 2^{6t}+2^{4t})$$

(2)　$V'(t)=\dfrac{\pi}{4\log 2}(8\cdot 2^{8t}\log 2-12\cdot 2^{6t}\log 2+4\cdot 2^{4t}\log 2)$

$$=2\cdot 2^{8t}-3\cdot 2^{6t}+2^{4t}$$

$$=2^{4t}(2\cdot 2^{4t}-3\cdot 2^{2t}+1)$$

$$=2^{4t}(2\cdot 2^{2t}-1)(2^{2t}-1)$$

すると，$t<0$ から $2^{2t}-1<0$ となり，$V(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$V(t)$ の最大値は,

t	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0
$V'(t)$	＋	0	－	
$V(t)$	↗		↘	

$$V\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{-4}-2\cdot 2^{-3}+2^{-2})=\frac{\pi}{64\log 2}$$

[解 説]

とりたてて工夫もせずに解いています。ただ，$t<0$ には要注意です。

5

問題のページへ

(1)　k を $0 \leqq k \leqq 499$ を満たす整数とし，初めの k 回が任意，$k+1$ 回目に裏，その後 500 回続けて表が出て，$k+501$ 回目に終了する場合を考える。

ここで，$n = k+501$ とおくと，$501 \leqq k+501 \leqq 1000$ から，

$$p(n) = 1^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{500} = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

(2)　1001 回目で終了するのは，500 回目に終了せず，501 回目に裏，その後 500 回続けて表が出る場合より，

$$p(1001) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1 - p(500)\}$$

また，1002 回目で終了するのは，500 回目，501 回目に終了せず，502 回目に裏，その後 500 回続けて表が出る場合より，

$$p(1002) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1 - p(500) - p(501)\}$$

すると，(1)から $p(501) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ なので，

$$p(1002) - p(1001) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1 - p(500) - p(501) - 1 + p(500)\}$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} p(501) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\left(\frac{1}{2}\right)^{501} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$$

(3)　$1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，(2)と同様に考えて，

$$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1 - p(500) - p(501) - \cdots - p(n-501)\}$$
$$p(n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1 - p(500) - p(501) - \cdots - p(n-500)\}$$

これより，$p(n+1) - p(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} p(n-500)$

$1002 \leqq n \leqq 1500$ より，$502 \leqq n-500 \leqq 1000$ なので，$p(n-500) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ となり，

$$p(n+1) - p(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\left(\frac{1}{2}\right)^{501} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$$

[解　説]

余事象の考え方を利用して(2)を解くと，(3)にスムーズに接続できます。しかし，場合分けをして(2)を解くと，(3)への接続の難度がアップします。