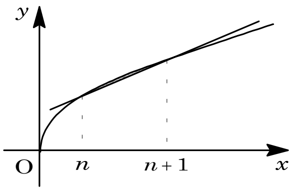
1

問題のページへ

$n \leqq x \leqq n+1$ において，$C: y=\sqrt{x}$ と x 軸にはさまれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，



$$V_1=\pi\int_n^{n+1}(\sqrt{x})^2dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{n+1}$$
$$=\frac{\pi}{2}\{(n+1)^2-n^2\}=\frac{\pi}{2}(2n+1)$$

さて，直線 l の方程式は，

$$y-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x-n)$$

ここで, x 軸との交点を $(p,\ 0)$ とおくと，

$$-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(p-n),\quad n-p=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n(n+1)}+n$$

$n \leqq x \leqq n+1$ において，l と x 軸にはさまれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は円錐台となり，その体積を V_2 とすると，

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n+1})^2(n-p+1)-\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n})^2(n-p)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\{(n+1)(n-p+1)-n(n-p)\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi(n+n-p+1)=\frac{1}{3}\pi(2n+\sqrt{n(n+1)}+1)$$

よって，C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は，

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}\{3(2n+1)-2(2n+\sqrt{n(n+1)}+1)\}$$
$$=\frac{\pi}{6}\{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{(2n+1)^2-4n(n+1)}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}$$
$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}$$
$$n^aV=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{n^a}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}$$

すると，$0<a<1$ のとき $n^aV\to 0\ (n\to\infty)$，$a>1$ のとき $n^aV\to\infty\ (n\to\infty)$ となり，条件に反する。よって，$a=1$ となり，このとき，

$$b=\lim_{n\to\infty}nV=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\cdot\frac{n}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2+2}=\frac{\pi}{24}$$

[解 説]

回転体の体積に関する基本問題です。極限値を求める部分も容易です。

2

問題のページへ

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}-|\log x|$とおく。

(i)　$x\geqq 1$ のとき

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\log x=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\log x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}\geqq 0$$

$x\geqq 1$ において，$f(x)\geqq f(1)=0$

(ii)　$0<x<1$ のとき

$$f(x)=-\frac{x-1}{\sqrt{x}}+\log x=-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\log x$$

$$f'(x)=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0$$

$0<x<1$ において，$f(x)>f(1)=0$

(i)(ii)より，$|\log x|\leqq\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$　（等号は$x=1$のとき成立）

(2)　$\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leqq|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$より，

$$(1\times p+1\times q+1\times r)^2\leqq(1^2+1^2+1^2)(p^2+q^2+r^2)$$

すると，$p+q+r=1$ より，$p^2+q^2+r^2\geqq\dfrac{1}{3}$

等号は，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ方向であるとき，すなわち $p>0$，$q>0$，$r>0$ から，$p=q=r=\dfrac{1}{3}$ のときに成立する。

(3)　(1)より，$\left|\log\dfrac{b}{a}\right|\leqq\dfrac{\left|\dfrac{b}{a}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left|\dfrac{b}{a}-1\right|=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{|b-a|}{a}=\dfrac{|b-a|}{\sqrt{ab}}$ となるので，

$$\left|\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}\right|\leqq\frac{ab}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$$

さらに，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}\leqq\left|\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}\right|$から，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}\leqq\sqrt{ab}$

同様にして，$\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}\leqq\sqrt{bc}$，$\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c}\leqq\sqrt{ca}$ となり，

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c}\leqq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\sqrt{a}=p$，$\sqrt{b}=q$，$\sqrt{c}=r$ とおくと，条件より $p+q+r=1$ なので, (2)より，

$$pq+qr+rp=\frac{1}{2}\{(p+q+r)^2-(p^2+q^2+r^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{1-(p^2+q^2+r^2)\}\leqq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

よって，$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqq \dfrac{1}{3}$ ………②

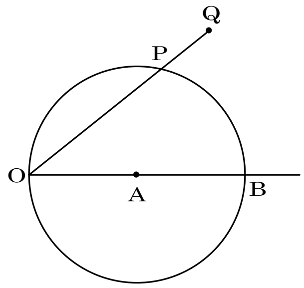
①②より，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}+\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}+\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c} \leqq \dfrac{1}{3}$

[解 説]

(1)と(2)の不等式を誘導として(3)の不等式を証明するわけですが，誘導が丁寧ではありません。ここでは，不等号の向きに注目することが手がかりになります。なお，(2)は，有名なコーシー・シュワルツの不等式ですが，普通に差をとって証明してもかまいません。

3

問題のページへ



(1)　条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(k>0)$

条件(b)に代入すると, $k>0$ より $k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=1$

これより，$k=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 C 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2r$ なので，③より，

$$2r\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=\frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2)　l が C と 2 点で交わる条件は, OH＜OB である。

すると，$\dfrac{1}{2r}<2r$ から，$r>\dfrac{1}{2}$ である。

[解 説]

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお，原点を O, x 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。

4

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3-x$ のとき，$f(2t-x)=(2t-x)^3-(2t-x)$

すると, 2 曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=f(2t-x)$ の交点の x 座標は,

$$x^3-x=(2t-x)^3-(2t-x),\quad x^3-(2t-x)^3-x+(2t-x)=0$$

$$(x-2t+x)\{x^2+x(2t-x)+(2t-x)^2-1\}=0$$

$$(x-t)(x^2-2tx+4t^2-1)=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$x=t$，$t\pm\sqrt{1-3t^2}$

すると，C_1 と C_2 が 3 点で交わる条件は, $(*)$が異なる 3 実数解をもつことより,

$$1-3t^2>0,\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $\alpha=t-\sqrt{1-3t^2}$，$\beta=t+\sqrt{1-3t^2}$ とおくと，$\alpha<t<\beta$ であり,

$$f(x)-f(2t-x)=2(x-t)(x-\alpha)(x-\beta)$$

ここで，C_1 と C_2 で囲まれた部分について，$\alpha\leqq x\leqq t$，$t\leqq x\leqq\beta$ の面積を，それぞれ S_1，S_2 とおくと,

$$S_1=2\int_{\alpha}^{t}(x-t)(x-t+\sqrt{1-3t^2})(x-t-\sqrt{1-3t^2})\,dx$$

$$=2\int_{\alpha-t}^{0}u(u+\sqrt{1-3t^2})(u-\sqrt{1-3t^2})\,du\quad(u=x-t)$$

$$=2\int_{-\sqrt{1-3t^2}}^{0}\{u^3-(1-3t^2)u\}\,du=2\Big[\frac{u^4}{4}-(1-3t^2)\frac{u^2}{2}\Big]_{-\sqrt{1-3t^2}}^{0}$$

$$=2\Big\{-\frac{1}{4}(1-3t^2)^2+\frac{1-3t^2}{2}(1-3t^2)\Big\}=\frac{1}{2}(1-3t^2)^2$$

$$S_2=-2\int_{t}^{\beta}(x-t)(x-t+\sqrt{1-3t^2})(x-t-\sqrt{1-3t^2})\,dx=\frac{1}{2}(1-3t^2)^2$$

すると，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=S_1+S_2=(1-3t^2)^2$$

よって，$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ から，$t=0$ のとき S は最大値 1 をとる。

[解 説]

題意より，C_1 と C_2 の交点の 1 つが $x=t$ 上にあることは明らかですが，この点を見逃すと計算におぼれてしまいます。同様に考えると，C_1 と C_2 で囲まれた 2 つの部分は $x=t$ に関して対称であることから，$S_1=S_2$ となります。

5

問題のページへ

(1)　k を自然数とするとき，積 M_kM_{k+1} が定義できるのは,

$$M_kM_{k+1}=AA,\ AB,\ BC,\ BD,\ CA,\ CB,\ DC,\ DD$$

これより，M_k がいずれでも，M_{k+1} は 2 通り存在する。

よって，M_1 は A, B, C, D のいずれか 4 通りであるので，積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できる場合は，$4\times2^{n-1}=2^{n+1}$ 通りある。

(2)　積が定義できる場合について，計算を行うと,

$$AA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BD=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$CB=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad DD=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ここで，$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ とおき，積が定義できる場合をまとめると,

$$AA=A,\ AB=B,\ BC=O,\ BD=B,\ CA=C,\ CB=P$$

$$DC=C,\ DD=D,\ PC=CBC=O,\ PD=CBD=CB=P$$

よって，積 $M_1M_2\cdots M_n$ は, A, B, C, D, P, および零行列のいずれかとなる。

さて，積 $M_1M_2\cdots M_n$ が零行列でない 2×3 行列となるのは，$M_1M_2\cdots M_n=B$ の場合であり，$M_1=A$ または B，$M_n=B$ または D である。

(i)　$M_1=A$ のとき

$ABDDD\cdots DD$ ，$AABDD\cdots DD$ ，$AAABD\cdots DD$ ，$\cdots$ ，$AAAAA\cdots AB$ より，$n-1$ 通りの場合がある。

(ii)　$M_1=B$ のとき

$BDDD\cdots DD$ の 1 通りのみである。

(i)(ii)より，$M_1M_2\cdots M_n=B$ となるのは，$(n-1)+1=n$ 通りの場合がある。

(3) (i)　$M_1M_2\cdots M_n=A$ のとき　$AAAA\cdots AA$ の 1 通りである。

(ii)　$M_1M_2\cdots M_n=B$ のとき　(2)より n 通りの場合がある。

(iii)　$M_1M_2\cdots M_n=C$ のとき

$M_1=C$ または D，$M_n=A$ または C である。

(iii‐i)　$M_1=C$ のとき　$CAAA\cdots AA$ の 1 通りである。

(iii‐ii)　$M_1=D$ のとき

$DCAAA\cdots AA$，$DDCAA\cdots AA$，$DDDCA\cdots AA$，$\cdots$，$DDDDD\cdots DC$ の $n-1$ 通りの場合がある。

合わせて，$1+(n-1)=n$ 通りとなる。

(iv)　$M_1M_2\cdots M_n=D$ のとき　$DDDD\cdots DD$ の 1 通りである。

(v)　$M_1M_2\cdots M_n=P$ のとき

$M_1=C$ または D，$M_n=B$ または D である。

(v‐i)　$M_1=C$ のとき

$CBDDD\cdots DD$，$CABDD\cdots DD$，$CAABD\cdots DD$，$\cdots$，$CAAAA\cdots AB$ の $n-1$ 通りの場合がある。

(v‐ii)　$M_1=D$ のとき

$DCBD\cdots DD$，$DCABD\cdots DD$，$DCAABD\cdots DD$，$\cdots$，$DCAAAA\cdots AB$

$DDCBD\cdots DD$，$DDCABD\cdots DD$，$DDCAABD\cdots DD$，$\cdots$，$DDCAAA\cdots AB$

$\cdots\cdots\cdots$，$DDDDD\cdots DCBD$，$DDDDD\cdots DCAB$，$DDDDD\cdots DDCB$

これより，$(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 通りの場合がある。

合わせて，$(n-1)+\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)=\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 通りとなる。

(i)〜(v)より，積 $M_1M_2\cdots M_n$ が零行列とならない場合の数は，

$$1+n+n+1+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+3n+4)$$

[解 説]

行列の積と場合の数が融合した難問です。A と D が単位行列であることに注目することがポイントですが，かなりの時間を費やしてしまいます。なお，(3)の(v‐ii)の場合は，(v‐i)の場合に，左側から D を 1 個，2 個，$\cdots$，$n-3$ 個，$n-2$ 個かけていき，右側の D を 1 つずつ減らしたものが対応しています。