1

解答解説のページへ

n を自然数とする。関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし，C 上の 2 点 $(n,\ \sqrt{n})$ と $(n+1,\ \sqrt{n+1})$ を通る直線を l とする。C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき $\lim_{n\to\infty} n^a V=b$ を満たす正の数 $a,\ b$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) x が正の数のとき，$|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2) $p,\ q,\ r$ が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき，$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ を示せ。

(3) $a,\ b,\ c$ が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。

3

解答解説のページへ

xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

$f(x)=x^3-x$ とし, t を実数とする。xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，直線 $x=t$ に関して C_1 と対称な曲線 $y=f(2t-x)$ を C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。4 個の行列

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

を重複を許して n 個並べたものを

$$M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n$$

とする。

(1) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

(2) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

(3) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列とならない場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。