1

解答解説のページへ

曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，…とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。

(2)　線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y = x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

3

解答解説のページへ

$x,\ y$ を変数とする。

(1)　n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 $a,\ b$ を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2)　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

4　　解答解説のページへ

三角形 OAB の辺 OA, OB 上に，それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また，その条件を満たす点$(a,\ b)$はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形 OPQ の辺上の点は，三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。

5

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle APB = \angle QPC$，$\angle PQC = \angle RQD$，$\angle QRD = \angle SRA$ となるようにとる。ただし，点 P，Q，R，S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。