$\boxed{1}$

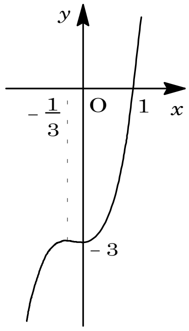
問題のページへ

まず，$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ より，

$$f'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$$

よって，$y = f(x)$ のグラフの概形は右下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{80}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$



また，点 $(t,\ 2t^3 + t^2 - 3)$ における接線の方程式は，

$$y - (2t^3 + t^2 - 3) = (6t^2 + 2t)(x - t)$$

原点を通るとき，

$$-(2t^3 + t^2 - 3) = (6t^2 + 2t)(-t)$$

$$4t^3 + t^2 + 3 = 0,\ (t+1)(4t^2 - 3t + 3) = 0$$

ここで，$4t^2 - 3t + 3 = 0$ は $D = 9 - 48 < 0$ より実数解をもたないので，$t = -1$ である。

このとき，接線は $y = 4x$ であるので，図より，直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲は，$m > 4$ である。

[解 説]

$f(x) = mx$ から，$x \neq 0$ のもとで定数 m を分離して，$\dfrac{f(x)}{x} = m$ として処理する方がクリアーです。しかし，文系に同じ問題が出されており，そこでの誘導に沿った解法を記しています。

2

問題のページへ

$S(n)=\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}$，$T(n)=\displaystyle\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$ に対して，$S(n)=T(n)$ を証明する。

(i)　$n=1$ のとき

$S(1)=\displaystyle\sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$T(1)=\displaystyle\sum_{q=1}^{1}\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2}$ より，$S(1)=T(1)$

(ii)　$n=k$ のとき

$S(k)=T(k)$，すなわち $\displaystyle\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}$ の成立を仮定する。

両辺に $\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}\right)$ を加えると，

$$\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{(k+1)+q}$$

よって，$S(k+1)=T(k+1)$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

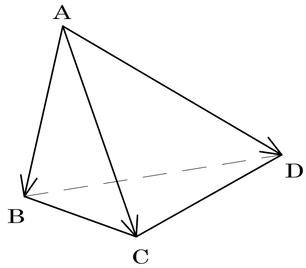
(i)(ii)より，正の整数 n に対して，$S(n)=T(n)$ が成り立つ。

[解 説]

たびたび出題されている有名問題です。神戸大でも出題されたとの記憶がありましたので，調べたところ, 10 年前の 1995 年でした。

3

問題のページへ



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=2,\ |\vec{d}|=3$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=2\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=3$$

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=3\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=0$$

このとき，$\overrightarrow{AE}=x\vec{b}+y\vec{c}+z\vec{d}$ とおくと，

$$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=|\overrightarrow{AE}|^2-2(x+y)+1$$

$$|\overrightarrow{CE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2(x+4y+3z)+4$$

$$|\overrightarrow{DE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\vec{d}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2(3y+9z)+9$$

条件より，$|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{DE}|$ なので，

$$-2(x+y)+1=0,\ 2x+2y=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$-2(x+4y+3z)+4=0,\ x+4y+3z=2\cdots\cdots\cdots②$$

$$-2(3y+9z)+9=0,\ 2y+6z=3\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$x=\frac{1}{2}$，$y=0$，$z=\frac{1}{2}$ となり，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$

$$|\overrightarrow{AE}|^2=\frac{1}{4}\left(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2\right)=\frac{5}{2}$$

よって，$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

[解 説]

$\angle DAB=90^\circ$ なので，A を原点とする座標を設定して解こうか，どうしようかと迷いました。計算量はどちらでも同じぐらいでしょう。

4

問題のページへ

(1)　条件より，$x=t\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y=1-t^2+t\sin\dfrac{\pi}{4}=1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y=0$ とすると，②から $1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=0$ より，

$$\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0,\ (\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})=0$$

$x\geqq 0$ より $t\geqq 0$ なので，$t=\sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x=1$ である。

(2)　$x=t\cos\theta$ ……③，$y=1-t^2+t\sin\theta$ ……④に対して，

$t=0$ のとき，$(x,\ y)=(0,\ 1)$

$t\neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta=\dfrac{x}{t}$，$\sin\theta=\dfrac{y-1+t^2}{t}$ から，

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y-1+t^2}{t}\right)^2=1,\ x^2+(y-1+t^2)^2=t^2 \cdots\cdots⑤$$

⑤は $(x,\ y)=(0,\ 1)$ を満たしているので，$t=0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2+(y-1)^2+2(y-1)t^2+t^4=t^2$

$$t^4+(2y-3)t^2+x^2+(y-1)^2=0 \cdots\cdots⑥$$

ここで，$u=t^2\geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2=0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

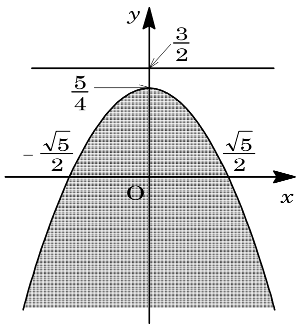
そこで，$f(u)=u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2$ とおき，$f(0)=x^2+(y-1)^2\geqq 0$ に注意すると，

$$D=(2y-3)^2-4\{x^2+(y-1)^2\}\geqq 0 \cdots\cdots⑧$$

$$u=-\frac{2y-3}{2}\geqq 0 \cdots\cdots⑨$$

⑧から，$-4y-4x^2+5\geqq 0$，$y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$

⑨から，$2y-3\leqq 0$，$y\leqq\dfrac{3}{2}$



以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(3)　点 Q の x 座標の最大値は，(2)より $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=t\cos\theta \cdots\cdots⑩,\ 0=1-t^2+t\sin\theta \cdots\cdots⑪$$

⑩より，$t=\dfrac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$$1-\frac{5}{4\cos^2\theta}+\frac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta}=0,\ 1-\frac{5}{4}(1+\tan^2\theta)+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta=0$$

まとめると，

$$5\tan^2\theta-2\sqrt{5}\tan\theta+1=0\,,\ \ (\sqrt{5}\tan\theta-1)^2=0$$

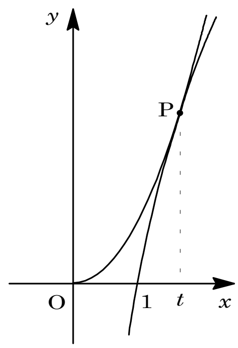
よって，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

[解 説]

難易度が高いというわけではありませんが，それなりに時間のかかる問題です。(2)では，まずパラメータ θ を動かし，その後，パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　まず，$y = x^n$ ……①に対して，$y' = nx^{n-1}$

また，$y = a\log x$ ……②に対して，$y' = \dfrac{a}{x}$

①と②が点 $\mathrm{P}(t,\ t^n)$ で共通接線をもつことより，

$$t^n = a\log t \cdots\cdots\cdots ③,\quad nt^{n-1} = \frac{a}{t} \cdots\cdots\cdots ④,$$

④より $nt^n = a$ なので，③を代入して $na\log t = a$ から，

$$t = e^{\frac{1}{n}},\quad a = ne$$

(2)　条件より，$S_1 = \displaystyle\int_0^t x^n dx = \Big[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big]_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$$S_2 = \int_1^t a\log x\,dx = a\Big[x\log x - x\Big]_1^t = a(t\log t - t + 1)$$

(1)より，$\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{a(n+1)(t\log t - t + 1)}{t^{n+1}} = \dfrac{n(n+1)e\left(e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{n}} + 1\right)}{e^{\frac{n+1}{n}}}$

$$= \frac{n(n+1)\left(e^{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{n} - e^{\frac{n+1}{n}} + e\right)}{e^{\frac{n+1}{n}}} = n(n+1)\left(\frac{1}{n} - 1 + e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

(3)　(a)　$f(x) = e^{-x} + x - 1 - \dfrac{x^2}{2}$ とおくと，

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 - x,\quad f''(x) = e^{-x} - 1$$

$x \geqq 0$ のとき，$f''(x) \leqq 0$ より，$f'(x) \leqq f'(0) = 0$

よって，$f(x) \leqq f(0) = 0$，すなわち $e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ $(x \geqq 0)$ が成り立つ。

(b)　$g(x) = e^{-x} + x - 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} = f(x) + \dfrac{x^3}{6}$ とおくと，

$$g'(x) = f'(x) + \frac{x^2}{2} = -e^{-x} + 1 - x + \frac{x^2}{2} = -f(x)$$

$x \geqq 0$ のとき $g'(x) \geqq 0$ より，$g(x) \geqq g(0) = 0$

すなわち，$\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1$ $(x \geqq 0)$ が成り立つ。

(4)　(3)より，$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$

ここで，$x = \dfrac{1}{n} > 0$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{n}\Big)^3 \leqq e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} - 1 \leqq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2$$

各辺に $n(n+1)$ をかけて，

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{n+1}{6n^2}\leqq n(n+1)\left(\frac{1}{n}-1+e^{-\frac{1}{n}}\right)\leqq\frac{n+1}{2n}$$

よって，$\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{6n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqq\dfrac{S_2}{S_1}\leqq\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$n\to\infty$のとき$\dfrac{S_2}{S_1}\to\dfrac{1}{2}$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}$である。

[解　説]

誘導が非常にていねいで，今までにはなかったような形式です。特に，(3)の設問には驚いてしまいます。