1

解答解説のページへ

$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

正の整数 n に対して,

$$S(n) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}, \quad T(n) = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{n+q}$$

とおく。等式 $S(n) = T(n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

4　　解答解説のページへ

θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t\cos\theta,\quad y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき, 点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき, Q の x 座標を求めよ。

(2)　θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき, C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を正の整数, a を正の実数とする。曲線 $y=x^n$ と曲線 $y=a\log x$ が, 点 P で共通の接線をもつとする。ただし, 対数は自然対数である。点 P の x 座標を t とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a, t をそれぞれ n を用いて表せ。

(2) 曲線 $y=x^n$ と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする。また, 曲線 $y=a\log x$ と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき, $\dfrac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ。

(3) $x\geqq 0$ のとき, 不等式 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leqq e^{-x}+x-1\leqq\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを, 次の(a), (b)に分けて示せ。ただし, e は自然対数の底とする。

(a) $x\geqq 0$ のとき, 不等式 $e^{-x}+x-1\leqq\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(b) $x\geqq 0$ のとき, 不等式 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leqq e^{-x}+x-1$ が成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。