1

問題のページへ

(1)　$0\leqq\arg z_k\leqq\dfrac{\pi}{2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$である n 個の複素数z_kに対して，数学的帰納法により，$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$が成立することを示す。

(i)　$n=1$のとき　左辺$=|z_1|^2=$右辺より，成立する。

(ii)　$n=l$のとき

$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_l|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_l|^2$の成立を仮定すると，

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_l|^2+|z_{l+1}|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_l|^2+|z_{l+1}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$|z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1}|^2=(z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1})(\overline{z_1+z_2+\cdots+z_l}+\overline{z_{l+1}})$

$$=|z_1+z_2+\cdots+z_l|^2+|z_{l+1}|^2+\sum_{p=1}^{l}(z_p\overline{z_{l+1}}+\overline{z_p}z_{l+1})$$

ここで，$z_p=r_p(\cos\theta_p+i\sin\theta_p)$，$z_{l+1}=r_{l+1}(\cos\theta_{l+1}+i\sin\theta_{l+1})$とおくと，

$$z_p\overline{z_{l+1}}=r_pr_{l+1}\{\cos(\theta_p-\theta_{l+1})+i\sin(\theta_p-\theta_{l+1})\}$$
$$\overline{z_p}z_{l+1}=r_pr_{l+1}\{\cos(-\theta_p+\theta_{l+1})+i\sin(-\theta_p+\theta_{l+1})\}$$

よって，$z_p\overline{z_{l+1}}+\overline{z_p}z_{l+1}=2r_pr_{l+1}\cos(\theta_p-\theta_{l+1})$

すると，$0\leqq\theta_p\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\theta_{l+1}\leqq\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta_p-\theta_{l+1}\leqq\dfrac{\pi}{2}$となることより，$\cos(\theta_p-\theta_{l+1})\geqq0$，すなわち$z_p\overline{z_{l+1}}+\overline{z_p}z_{l+1}\geqq0$なので，

$$|z_1+z_2+\cdots+z_l|^2+|z_{l+1}|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_l|^2+|z_{l+1}|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1}|^2$

(i)(ii)より, $n\geqq1$ で，$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2\cdots\cdots\cdots③$

(2)　$z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$とおくと，$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$より，

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=1+i(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)$$

$|z_k|=1$から，③にあてはめると，$n\leqq1+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)^2$

$$n-1\leqq(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)^2$$

ここで，$0\leqq\theta_k\leqq\dfrac{\pi}{2}$より，$\sin\theta_k\geqq0$となるので，

$$\sqrt{n-1}\leqq\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

[解 説]

(1)の証明は，どんな方法を採用しようかと迷い，たいへん時間がかかりました。しかし, (2)は, (1)の命題に具体例を適用するだけで，あっさり解決しました。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=p+4q$，$a_2=p^2-4q^2$ の公約数を m とし，整数 b_1，b_2 に対し，$a_1=mb_1$，$a_2=mb_2$ とすると，

$$p+4q=mb_1\cdots\cdots\cdots①,\ \ p^2-4q^2=mb_2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $p=mb_1-4q$，②に代入して $(mb_1-4q)^2-4q^2=mb_2$

$$12q^2=m(b_2-b_1{}^2+8b_1q)\cdots\cdots\cdots③$$

さて，素数 p，q は $p>2q$ を満たすので，p は 5 以上の奇数である。これより，$p+4q$ は奇数となり，①より m は奇数である。

さらに，③より m は $12q^2=2^2\times3\times q^2$ の約数であるので，$m>1$ であれば，奇数 m の値として，$m=3$，q，q^2，$3q$，$3q^2$ $(q\neq2)$ が考えられる。

ところが，$m=q$，q^2，$3q$，$3q^2$ のときは，①より p は q の倍数となり，不適である。

以上より，$m>1$ であれば，$m=3$ である。

(2)　まず，$a_1=(p+q)+3q$ から，a_1 が 3 の倍数であるためには，$p+q$ が 3 の倍数であることが必要である。

逆に，$p+q$ が 3 の倍数とき，任意の n に対して，

$$a_n=p^n-4(-q)^n=p^n-(3+1)(-q)^n=p^n-(-q)^n-3(-q)^n$$
$$=(p+q)\{p^{n-1}+p^{n-2}(-q)+\cdots+(-q)^{n-1}\}-3(-q)^n$$

これより，a_n はすべて 3 の倍数となるので，a_n が 3 の倍数である条件と，$p+q$ が 3 の倍数である条件は等しい。

さて，素数 p, q は $p>2q$ を満たすので，$p\geqq5$, $q\geqq2$ である。

そこで，$q=2$ のときを考えると，$p+q$ が 3 の倍数となる最小の素数 p は 7 であり，このとき $pq=14$ となる。

また，$q\geqq3$ のときは $p\geqq7$ から $pq\geqq21$ となり，これより積 pq が最小となる p, q は，$p=7$，$q=2$ である。

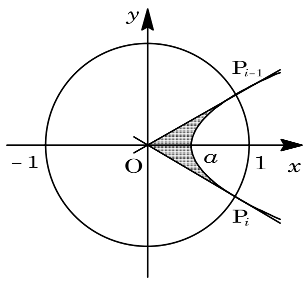
［解 説］

(2)において，a_2 についても，$a_2=p^2-q^2-3q^2=(p+q)(p-q)-3q^2$ と変形し，3 の倍数となる条件を考えています。

3

問題のページへ

$1 \leqq i \leqq n$ として，右図のように，$P_{i-1}\left(\cos\frac{\pi}{n},\ \sin\frac{\pi}{n}\right)$，$P_i\left(\cos\frac{\pi}{n},\ -\sin\frac{\pi}{n}\right)$とおく。



また，直線OP_{i-1}，OP_iとそれぞれ点P_{i-1}，P_iで接する放物線を$y^2 = 4p(x-a)\ (p>0)$とすると，点P_{i-1}における接線は，$y\sin\frac{\pi}{n} = 2p\left(x - a + \cos\frac{\pi}{n} - a\right)$

$$y = \frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}x + 2p\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n} - 2a}{\sin\frac{\pi}{n}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，直線OP_{i-1}は，$y = x\tan\frac{\pi}{n}\ \cdots\cdots\cdots②$

①と②が一致することより，

$$\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}} = \tan\frac{\pi}{n}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \cos\frac{\pi}{n} - 2a = 0\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より$p = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\ \cdots\cdots⑤$，④より$a = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\ \cdots\cdots⑥$となる。

このとき，直線OP_{i-1}，OP_iと放物線によって囲まれた図形の面積をT_iとおくと，

$$T_i = 2\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} - \int_a^{\cos\frac{\pi}{n}} y\,dx\right\}$$

ここで, $n \geqq 3$なので，$0 < \frac{\pi}{n} \leqq \frac{\pi}{3}$となり，⑤⑥より，

$$\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}} y\,dx = \int_a^{\cos\frac{\pi}{n}} 2\sqrt{p}\sqrt{x-a}\,dx = 2\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}\left[(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{p}\left(\cos\frac{\pi}{n} - a\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

よって，$T_i = \cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} - \frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

すると，$S_n = nT_i = \frac{n}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$より，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{3}$

[解 説]

ひねりはあるものの，やっとよく見かける問題に出会いました。

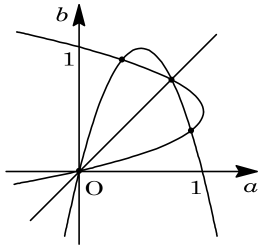
4　　問題のページへ

(1)　$f(x)=rx(1-x)$とおくと，$x_{n+1}=f(x_n)$………(＊)

さて，$x_1=x_2=a$とすると，$a=f(a)$であり，このとき(＊)から，帰納的に$x_n=a$となるので，求めるaの条件は，$a=ra(1-a)$，$ra^2-(r-1)a=0$

よって，$r=0$のとき$a=0$，$r\neq 0$のとき$a=0,\ \dfrac{r-1}{r}$である。

(2)　条件より，$x_1=x_3=a$のとき，$x_2=b\neq a$とおくと，$x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$から，



$$b=f(a)\text{，}\ b=ra(1-a)\cdots\cdots\cdots①$$

$$a=f(b)\text{，}\ a=rb(1-b)\cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$b-a=r(a-b)-r(a^2-b^2)$

$b\neq a$から，$-1=r(1-a-b)$，$1-a-b=-\dfrac{1}{r}\ (r\neq 0)$

①を代入して，$1-a-ra(1-a)=-\dfrac{1}{r}$，$ra^2-(r+1)a+1+\dfrac{1}{r}=0$………③

$$D=(r+1)^2-4r\left(1+\frac{1}{r}\right)=r^2-2r-3=(r-3)(r+1)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$b\neq a$すなわち$ra(1-a)\neq a$という条件は，(1)より$a\neq 0$，$a\neq\dfrac{r-1}{r}$に対応する。$a=0$では，③は$1+\dfrac{1}{r}=0$，$r=-1$となるが，このとき③は重解をもち，$b\neq a$を満たすaはない。$a=\dfrac{r-1}{r}$では，$r\cdot\dfrac{(r-1)^2}{r^2}-(r+1)\cdot\dfrac{r-1}{r}+1+\dfrac{1}{r}=0$から$r=3$となるが，このときも③は重解をもち，$b\neq a$を満たす$a$はない。

したがって，$r=0$のときも含めて，④から，$-1\leqq r\leqq 3$のときaは存在しない。また，$r<-1,\ 3<r$のときaは2個存在する。

(3)　まず，$0\leqq a\leqq 1$となるaに対して，$0\leqq x_2\leqq 1$が必要なので，(2)と同様に考えて，

$$b=f(a)=ra(1-a)=-ra^2+ra=-r\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}r$$

$r<0$では，明らかに$b<0$となるaが存在し，不適である。

$r\geqq 0$では，求める条件は$0\leqq\dfrac{1}{4}r\leqq 1$，すなわち$0\leqq r\leqq 4$である。

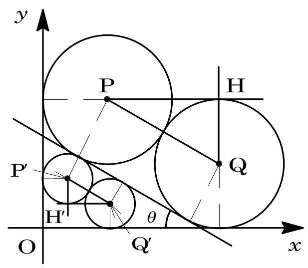
逆に$0\leqq r\leqq 4$のとき，(＊)から帰納的に，どんなnに対しても$0\leqq x_n\leqq 1$となるので，求める条件は$0\leqq r\leqq 4$である。

[解　説]

(2)では，$r>0$のときの1例を図に示しました。2つの放物線$b=f(a)$と$a=f(b)$の$b\neq a$である共有点の個数を求めるということに注目して解いています。

5

問題のページへ



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，直線 $l: x\sin\theta+y\cos\theta=1$ の上向きの法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ とすることができるので，これより l の右向きの方向ベクトルの成分は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。

さて，半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ P, Q とおき, P を通り x 軸に平行な直線と, Q を通り y 軸に平行な直線との交点を H とおくと，$\mathrm{PQ}=2R$，$\angle\mathrm{QPH}=\theta$ となる。

すると，点 P の座標は $\mathrm{P}(R,\ 2R\sin\theta+R)$ となり，直線 l との距離が R なので，

$$\frac{R\sin\theta+(2R\sin\theta+R)\cos\theta-1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=R$$

$R(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)-1=R$ より，$R=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}$

同様にして，図のように点 P′，Q′，H′ を設定すると，$\mathrm{P}'(r,\ 2r\sin\theta+r)$ となり，

$$\frac{-\{r\sin\theta+(2r\sin\theta+r)\cos\theta-1\}}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=r$$

$-r(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)+1=r$ より，$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

以上より，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $1<t\leqq\sqrt{2}$ である。

ここで，$\dfrac{r}{R}=f(t)$ とおくと, (1)より，

$$f(t)=\frac{t+t^2-2}{t+t^2}=1-\frac{2}{t+t^2}$$

すると，$1<t\leqq\sqrt{2}$ で，$f'(t)=\dfrac{2(2t+1)}{(t+t^2)^2}>0$ より，$f(t)$ は単調増加し，

$$f(1)<f(t)\leqq f(\sqrt{2})$$

よって，$f(1)=0$，$f(\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ より，$0<\dfrac{r}{R}\leqq-1+\sqrt{2}$ である。

[解 説]

(1)はいろいろな解法が考えられます。最初に考えたのは, 直線 l の x 切片と y 切片の間の距離を R と θ で表すものでした。しかし, 計算が複雑になりすぎ, 次に考えたのが上に記した解法です。