1

解答解説のページへ

n を自然数とする。

(1)　n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ。

(2)　n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が

$$0 \leqq \theta_k \leqq \frac{\pi}{2}\quad\text{かつ}\quad \cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$$

を満たすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

素数 p, q に対して，$a_n = p^n - 4(-q)^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって整数 a_n を定める。ただし，$p > 2q$ とする。

(1)　a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m = 3$ であることを示せ。

(2)　a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。

3　　解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 P_0，P_1，…，P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ とする。放物線 C_1，C_2，…，C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

4　　解答解説のページへ

実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a,\ \ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。

(1)　すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ。

(2)　$x_2 \neq a$，$x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ。

(3)　$0 \leqq a \leqq 1$ となるすべての a について $0 \leqq x_n \leqq 1$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つような r の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面上に直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x\sin\theta + y\cos\theta \geqq 1$ が表す領域を D, 不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x\sin\theta + y\cos\theta \leqq 1$ が表す領域を D' とする。

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 を，C_1 は l と y 軸に接し，C_2 は l と x 軸に接し，さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1'，C_2' を，C_1' は l と y 軸に接し，C_2' は l と x 軸に接し，さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる。

(1) $\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ。

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。