

1

問題のページへ

(1)  $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$  より,  $n \geq 2$  で,

$$z_n = z_1 w^3 w^5 w^7 \dots w^{2n-1} = w w^3 w^5 w^7 \dots w^{2n-1} = w^{1+3+5+7+\dots+2n-1} = w^{n^2}$$

これは  $n=1$  のときも成立するので,

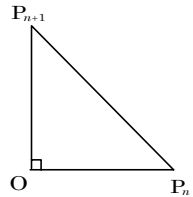
$$z_n = a^{n^2} \{ \cos(5^\circ \times n^2) + i \sin(5^\circ \times n^2) \}$$

 $z_n$  が実数になるための必要十分条件は,  $k$  を整数として,

$$5^\circ \times n^2 = 180^\circ \times k, \quad n^2 = 36k$$

よって,  $n^2$  は 36 の倍数より,  $n$  は 6 の倍数である。(2)  $|z_{n+1}| = |z_n w^{2n+1}| = |z_n| |w|^{2n+1} = a^{2n+1} |z_n|$  より,  $OP_{n+1} = a^{2n+1} OP_n$  $OP_n P_{n+1}$  が直角二等辺三角形となる場合を  $a$  の値で場合分けをする。(i)  $a=1$  のとき $OP_{n+1} = OP_n$  より,  $\angle P_n OP_{n+1} = 90^\circ$  となり,

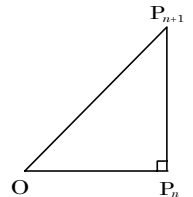
$$w^{2n+1} = \cos 90^\circ \pm i \sin 90^\circ$$

よって,  $5^\circ \times (2n+1) = \pm 90^\circ + 360^\circ \times k$ ,  $2n+1 = \pm 18 + 72k$ これを満たす整数  $n$  は存在しない。(ii)  $a > 1$  のとき $OP_{n+1} > OP_n$  より,  $\angle OP_n P_{n+1} = 90^\circ$  となり,

$$w^{2n+1} = \sqrt{2} (\cos 45^\circ \pm i \sin 45^\circ)$$

よって,  $a^{2n+1} = \sqrt{2}$ ,  $5^\circ \times (2n+1) = \pm 45^\circ + 360^\circ \times k$ 

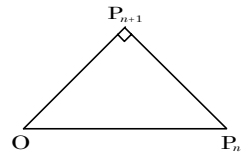
$$a = 2^{\frac{1}{2(2n+1)}}, \quad 2n+1 = \pm 9 + 72k$$

 $n \geq 1$  より  $3 \leq 2n+1 \leq 35$  なので,  $k=0$  で  $n=4$ ,  $a = 2^{\frac{1}{18}}$  である。(iii)  $0 < a < 1$  のとき $OP_{n+1} < OP_n$  より,  $\angle OP_{n+1} P_n = 90^\circ$  となり,

$$w^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 45^\circ \pm i \sin 45^\circ)$$

よって,  $a^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $5^\circ \times (2n+1) = \pm 45^\circ + 360^\circ \times k$ 

$$a = 2^{\frac{1}{2(2n+1)}}, \quad 2n+1 = \pm 9 + 72k$$

(ii) と同様にすると,  $k=0$  で  $n=4$ ,  $a = 2^{-\frac{1}{18}}$  である。

## [ 解 説 ]

(1)は(2)の誘導ではなく, お互い独立した問題です。(2)は  $w$  の絶対値で場合分けをすると, 直角二等辺三角形の配置が決まります。

2

問題のページへ

$$(1) f(t) = \frac{\log t}{2} + \frac{1-t}{1+t} \text{ とおくと,}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2t} + \frac{-(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2} = \frac{(1-t)^2}{2t(1+t)^2}$$

$0 < t < 1$  で  $f'(t) > 0$  より,  $f(t) < f(1) = 0$  となり,  $\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$  が成り立つ。

$$(2) y = e^{kx} \text{ より, } y' = ke^{kx} \text{ なので, } P(a, e^{ka}) \text{ における接線は,}$$

$$y - e^{ka} = ke^{ka}(x - a) \dots\dots\dots$$

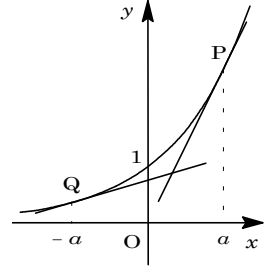
$$Q(-a, e^{-ka}) \text{ における接線は,}$$

$$y - e^{-ka} = ke^{-ka}(x + a) \dots\dots\dots$$

$$\text{の交点は, } ke^{ka}(x - a) + e^{ka} = ke^{-ka}(x + a) + e^{-ka}$$

$$k(e^{2ka} - 1)x = (ka - 1)e^{2ka} + ka + 1$$

$$x = \frac{(ka - 1)e^{2ka} + ka + 1}{k(e^{2ka} - 1)} = \frac{(ka - 1) + (ka + 1)e^{-2ka}}{k(1 - e^{-2ka})}$$



ここで,  $e^{-2ka} = t$  とおくと,  $k > 0, a > 0$  より  $0 < t < 1$  となり,  $ka = -\frac{\log t}{2}$  である。

$$x = \frac{\left(-\frac{\log t}{2} - 1\right) + \left(-\frac{\log t}{2} + 1\right)t}{k(1-t)} = \frac{-\frac{\log t}{2}(1+t) + (t-1)}{k(1-t)}$$

$$= \frac{1}{k} \left(-\frac{\log t}{2} \cdot \frac{1+t}{1-t} - 1\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1+t}{1-t} \left(-\frac{\log t}{2} - \frac{1-t}{1+t}\right)$$

(1)から,  $-\frac{\log t}{2} - \frac{1-t}{1+t} > 0$  なので,  $x > 0$  となり,  の交点の  $x$  座標はつねに正

である。

### [ 解 説 ]

(2)では, (1)の不等式が使えるようで使えない, 何か隔靴搔痒という感じがしました。このため, 時間がずいぶんかかってしまいました。

3

問題のページへ

(1)  $n$  を自然数として,  $f(x)$  を  $n$  次式とすると, 条件より, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  で,  $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0$  なので,  $k$  を定数として,

$$f(x) = k(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

ここで,  $x = a_{n+1} > a_n$  に対して,  $f(a_{n+1}) = 0$  なので,

$$k(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n) = 0$$

よって,  $k = 0$  となり,  $f(x) = 0$  である。(2)  $F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$  に対して,  $a_k = k\pi$  とおくと,

$$F(a_k) = f_1(a_k) + f_2(a_k) \sin k\pi + f_3(a_k) \sin 2k\pi = f_1(a_k)$$

条件より,  $F(a_k) = 0$  なので  $f_1(a_k) = 0$  となり, (1)より  $f_1(x) = 0$  である。

$$F(x) = f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$$

次に,  $b_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  とおくと,

$$F(b_k) = f_2(b_k) \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + f_3(b_k) \sin(4k\pi + \pi) = f_2(b_k)$$

条件より,  $F(b_k) = 0$  なので  $f_2(b_k) = 0$  となり, (1)より  $f_2(x) = 0$  である。

$$F(x) = f_3(x) \sin 2x$$

さらに,  $c_k = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  とおくと,

$$F(c_k) = f_3(c_k) \sin\left(4k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = f_3(c_k)$$

条件より,  $F(c_k) = 0$  なので  $f_3(c_k) = 0$  となり, (1)より  $f_3(x) = 0$  である。

## [ 解 説 ]

当然と思えることを証明するときは, 気苦労が絶えません。この問題では,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$  の条件が, とりたてて必要でもないのです, なおさらです。

4

問題のページへ

(1)  $l \geq 2$  より,  $l^{m-1} k^n < l^m \dots\dots$  から,  $m-1 \leq n \log_l k < m \dots\dots$   
 $k \geq 2, n \geq 1$  より,  $n \log_l k > 0$  なので,  $n \log_l k < m$  を満たす自然数  $m$  が存在する。すなわち,  $n \log_l k < m$  を満たす自然数  $m$  は存在する。

(2)  $n \log_l k < m$  より,  $(m-1) \log l \leq n \log k < m \log l$

$$\log l > 0 \text{ より, } \frac{m-1}{n} \frac{\log k}{\log l} < \frac{m}{n} \dots\dots$$

さて,  $a_{kl} = a_k + a_l$  において,  $l = k$  とすると,  $a_{k^2} = 2a_k$

$$a_{k^3} = a_{k^2} + a_k = 2a_k + a_k = 3a_k$$

すると, 帰納的に,  $a_{k^n} = na_k$  となる。

ここで,  $a_k < a_{k+1}$  より,  $a_{l^{m-1} k^n} < a_{l^m}$  となり,

$$(m-1)a_l + na_k < ma_l$$

さらに,  $k \geq 2, l \geq 2$  より  $kl > k$  なので,  $a_k + a_l = a_{kl} > a_k$  から,  $a_l > 0$  である。

$$\text{よって, } \frac{m-1}{n} \frac{a_k}{a_l} < \frac{m}{n} \dots\dots$$

$$\text{より, } \frac{m-1}{n} - \frac{m}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n} \dots\dots$$

(3)  $k, l$  と無関係などんな  $n$  に対しても,  $n \log_l k < m$  が成立するので,

$$\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0, \quad a_k = \frac{\log k}{\log l} a_l \dots\dots$$

$$\text{に } l = 2 \text{ を代入すると, } a_k = \frac{\log k}{\log 2} a_2 = a \log_2 k$$

これは,  $a_k < a_{k+1}$  および  $a_{kl} = a_k + a_l$  を満たしている。

### [ 解 説 ]

与えられた漸化式をみて, 対数関数のイメージをもつことができれば, 証明のネットワークとなる  $n \log_l k < m$  を導くことが可能です。それでも, 本問がいちばんの難問であることは, 変わりありません。

5

問題のページへ

(1) 楕円の中心を  $(a, b)$  とおくと,  $x$  軸,  $y$  軸の両方に接することより,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

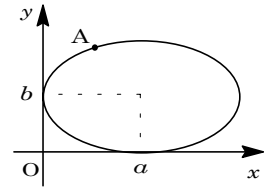
$A(1, 2)$  を通るので,  $a > 0, b > 0$  として,

$$\frac{(1-a)^2}{a^2} + \frac{(2-b)^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{2-b}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1-a}{a}\right)^2 \dots\dots$$

$b > 0$  のとき,  $\frac{2-b}{b} = \frac{2}{b} - 1$   $-1$  から  $\left(\frac{2-b}{b}\right)^2 = 0$  となり,  $-1 < \frac{1-a}{a} < 1$

$a > 0$  から,  $-a < 1-a < a$  より,  $a > \frac{1}{2}$  である。



(2) より,  $\frac{4-4b+b^2}{b^2} = \frac{2a-1}{a^2}$  で,  $k = \frac{2a-1}{a^2} = \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} = -\left(\frac{1}{a}-1\right)^2 + 1$  とおくと,

(1)より  $a > \frac{1}{2}$  なので,  $0 < \frac{1}{a} < 2$  から  $0 < k < 1$  ..... となり,

$$4-4b+b^2 = kb^2, (1-k)b^2 - 4b + 4 = 0 \dots\dots$$

を満たす  $b$  の値が 2 つ存在する条件は,  $k \neq 1$  かつ  $D/4 = 4-4(1-k) = 4k > 0$

と合わせると  $0 < k < 1$  となり,  $0 < \frac{2a-1}{a^2} < 1$  より,  $a > \frac{1}{2}$  かつ  $a \neq 1$  である。

このとき の解は  $b = \frac{2 \pm 2\sqrt{k}}{1-k}$  なので,  $B\left(a, \frac{2-2\sqrt{k}}{1-k}\right), C\left(a, \frac{2+2\sqrt{k}}{1-k}\right)$  より,

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{k}}{1-k} \cdot |a-1| = 2|a-1| \frac{a\sqrt{2a-1}}{(1-a)^2} = \frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}$$

さて,  $f(x) = \frac{2x\sqrt{2x-1}}{x-1}$  とおくと,

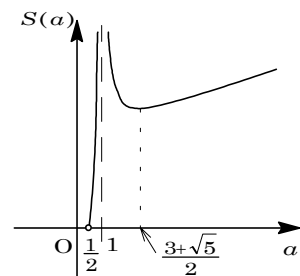
$$f'(x) = \frac{2(x^2-3x+1)}{(x-1)^2\sqrt{2x-1}}$$

$f'(x) = 0$  の解は,  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  となる

ので,  $f(x)$  の増減は右表のようになる。

すると,  $S(a) = |f(a)|$  より, 右図が  $S(a)$  のグラフである。

$x$	$\frac{1}{2}$	...	1	...	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(x)$	×	-	×	-	0	+
$f(x)$	0	↘	×	↘		↗



[ 解 説 ]

計算量の多い問題です。  $S(a)$  のグラフの極小値は, すごい値になりましたので, 省略しました。