1

解答解説のページへ

a を正の実数，$w=a(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ)$ とする。ただし，i は虚数単位である。また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1=w$，$z_{n+1}=z_n w^{2n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

(2)　複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする。$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)　$0<t<1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。

(2)　k を正の定数とする。$a>0$ とし，曲線 $C:y=e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標はつねに正であることを示せ。

3

解答解説のページへ

(1) $f(x)$を x の整式とし，$\{a_k\}$は$a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$および$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$を満たす数列とする。このとき$f(a_k)=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ならば，$f(x)$は整式として 0 であることを示せ。

(2) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$をxの整式とし，

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)\sin x + f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数xに対して 0 であるとする。このとき$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$は，いずれも整式として 0 であることを示せ。

4　　　解答解説のページへ

数列$\{a_k\}$が$a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$および

$$a_{kl} = a_k + a_l \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ l=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。

(1)　$k,\ l$を 2 以上の自然数とする。自然数nが与えられたとき，$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$を満たす自然数mが存在することを示せ。

(2)　$k,\ l$を 2 以上の自然数とするとき，$-\dfrac{1}{n} < \dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$a_2 = a$とするとき，数列$\{a_k\}$の一般項を求めよ。

5

解答解説のページへ

(1)　平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち，x 軸，y 軸の両方に接する楕円を考える。その中心の x 座標を a とする。このような楕円のうち，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ。ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする。

(2)　(1)の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする。$\triangle$ABC の面積を $S(a)$ で表すとき，この関数のグラフをかけ。