

1

問題のページへ

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の異なる 3 つの実数解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) とおくと,

$$\alpha + \beta + \gamma = -a, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \quad \alpha\beta\gamma = -c$$

条件より, $a > 0, b > 0$ なので, $\alpha + \beta + \gamma < 0 \dots\dots$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha > 0 \dots\dots$

より, $0 > \alpha + \beta + \gamma > \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ なので, $\alpha < 0$ となる。

ここで, $\beta > 0$ と仮定すると $\gamma > 0$ となり, 条件より $\alpha + \beta < -\gamma < 0$ なので,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) < 0$$

これは条件に反するので, $\beta < 0$ である。

以上より, α, β, γ の少なくとも 2 つは負である。

[解 説]

グラフを利用しようか, 解と係数の関係を利用しようかと迷いましたが, 結局, 後者で解をつくりました。

2

問題のページへ

- (1) $P(a, \frac{1}{a})$, $Q(b, \frac{1}{b})$, $R(c, \frac{1}{c})$, $S(d, \frac{1}{d})$ とおくと、四角形 PQSR が長方形なので、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ かつ $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ である。

$$b-a = d-c \dots\dots, \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \dots\dots$$

$$(b-a)(c-a) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = 0 \dots\dots$$

より $\frac{a-b}{ab} = \frac{c-d}{cd}$ となり、 を代入して、

$$ab = cd \dots\dots$$

$$\text{より } (b-a)(c-a) + \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{a-c}{ac} = 0$$

$$(a-b)(a-c) > 0 \text{ より, } 1 + \frac{1}{a^2bc} = 0, \quad a^2bc + 1 = 0 \dots\dots$$

より $d = b - a + c$ として、 に代入すると $ab = c(b - a + c)$

$$b(a-c) + c(a-c) = 0, \quad (b+c)(a-c) = 0$$

$$a-c > 0 \text{ より, } b+c = 0, \quad c = -b \dots\dots$$

$$\text{より } b-a = d+b, \quad d = -a$$

$$\text{より } a^2b^2 = 1 \text{ で } 0 < b < a \text{ より } ab = 1, \quad b = \frac{1}{a}$$

さらに、これを に代入して、 $c = -\frac{1}{a}$

- (2) (1)より、 $Q(\frac{1}{a}, a)$, $R(-\frac{1}{a}, -a)$, $S(-a, -\frac{1}{a})$ となるので、PとQ, RとSは直線 $y = x$ に関して対称になっており、 $b = \frac{1}{a} < a$ から $1 < a$ である。

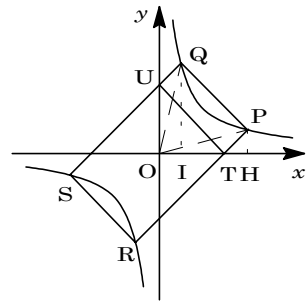
ここで、直線 PR : $y - \frac{1}{a} = x - a$ と x 軸との交点は、 $y = 0$ として $x = a - \frac{1}{a}$ から $T(a - \frac{1}{a}, 0)$ となる。また、点 U は点 T と直線 $y = x$ に関して対称なので、 $U(0, a - \frac{1}{a})$ である。

さて、線分 TU と曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ が共通点をもたないのは、線分 TU の中点 $(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}, \frac{a}{2} - \frac{1}{2a})$ が、領域 $xy < 1$ に存在することである。

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right)^2 < 1, \quad -1 < \frac{a}{2} - \frac{1}{2a} < 1, \quad -2a < a^2 - 1 < 2a$$

$a^2 + 2a - 1 > 0$ より $a < -1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2} < a$ となり、 $a^2 - 2a - 1 < 0$ より $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$ となる。

$1 < a$ と合わせて共通範囲を求めると、 $1 < a < 1 + \sqrt{2}$



(3) 点 P, Q から x 軸に下ろした垂線の足を, それぞれ H, I とする。

すると, (1)より OHP と OIQ の面積は等しいので, 線分 OP, OQ と曲線 C によって囲まれた部分の面積は,

$$\text{OIQ} + \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x} dx - \text{OHP} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x} dx = [\log x]_{\frac{1}{a}}^a = \log a - \log \frac{1}{a} = 2 \log a$$

よって, $S(a) = 2 \log a + \text{OUQ} + \text{OTP} - \text{OTU}$

$$= 2 \log a + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)^2$$

$$= 2 \log a - \frac{1}{2} a^2 - \frac{3}{2a^2} + 2$$

(4) $S'(a) = \frac{2}{a} - a + \frac{3}{a^3} = -\frac{(a^2 - 3)(a^2 + 1)}{a^3}$

右表より, $a = \sqrt{3}$ のとき $S(a)$ は最大値をとる。

a	1	...	$\sqrt{3}$...	$1 + \sqrt{2}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		\nearrow		\searrow	

$$S(\sqrt{3}) = 2 \log \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{3}{2 \cdot 3} + 2 = \log 3$$

[解説]

双曲線を原点のまわりに 45° 回転すれば, 長方形が直線 $y = x$ に関して対称であることは明らかです。なお, (3)の解は, 線分 OP, OQ と曲線 C によって囲まれた部分の面積が簡単に求められることを利用しています。

3

問題のページへ

$$(1) \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\overline{z_{n-2}}}{z_{n-1}} \text{ より, } z_n \overline{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} z_{n-1} \overline{z_{n-2}} \dots\dots\dots$$

の両辺の共役複素数を考えて, $\overline{z_n z_{n-1}} = \frac{\overline{\alpha^2}}{4} \overline{z_{n-1} z_{n-2}}$

$$|\alpha| = 1 \text{ より, } |\alpha|^2 = \alpha \overline{\alpha} = 1, \overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \text{ となり, } \overline{z_n z_{n-1}} = \frac{1}{4\alpha^2} \overline{z_{n-1} z_{n-2}} \dots\dots\dots$$

$$\times \text{ より, } z_n \overline{z_n z_{n-1} z_{n-1}} = \frac{1}{16} z_{n-1} \overline{z_{n-1} z_{n-2} z_{n-2}}, z_n \overline{z_n} = \frac{1}{16} z_{n-2} \overline{z_{n-2}}$$

$$|z_n|^2 = \frac{1}{16} |z_{n-2}|^2, |z_n| = \frac{1}{4} |z_{n-2}| \dots\dots\dots$$

(i) $n = 2k - 1$ ($k \geq 1$) のとき

$$|z_1| = 1 \text{ で, } \text{ より, } |z_{2k-1}| = \frac{1}{4} |z_{2(k-1)-1}| = |z_1| \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$|z_n| = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}-1} = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(ii) $n = 2k$ ($k \geq 1$) のとき

$$|z_2| = \left|\frac{\alpha^4}{2}\right| = \frac{|\alpha|^4}{2} = \frac{1}{2} \text{ で, } \text{ より, } |z_{2k}| = \frac{1}{4} |z_{2(k-1)}| = |z_2| \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$|z_n| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(i)(ii)より, $|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, |z_n|^2 = z_n \overline{z_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ から, $\overline{z_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{z_n} \dots\dots\dots$

$$\text{より, } z_n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \frac{1}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} z_{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} \frac{1}{z_{n-2}}, \frac{z_n}{z_{n-1}} = \alpha^2 \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}$$

$$\text{よって, } \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{z_2}{z_1} (\alpha^2)^{n-2} = \frac{\alpha^4}{2} \alpha^{2n-4} = \frac{\alpha^{2n}}{2}$$

$$z_n = z_1 \cdot \frac{\alpha^4}{2} \cdot \frac{\alpha^6}{2} \cdot \frac{\alpha^8}{2} \dots \frac{\alpha^{2n}}{2} = \frac{\alpha^{4+6+8+\dots+2n}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \alpha^{(n+2)(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

この式に $n = 1$ をあてはめると $z_1 = 1$ となり, $n = 1$ のときも成り立つ。

(2) $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$ なので,

$$\frac{1}{2^{n-1}} \alpha^{(n+2)(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{2(n+2)(n-1)}{3} \pi + i \frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{2(n+2)(n-1)}{3} \pi$$

$$(1) \text{ より, } x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{2(n+2)(n-1)}{3} \pi, y_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{2(n+2)(n-1)}{3} \pi$$

(i) $n = 3l + 1$ ($l \geq 0$) のとき

$$\frac{2(n+2)(n-1)}{3} \pi = \frac{2(3l+3) \cdot 3l}{3} \pi = (6l^2 + 6l)\pi \text{ より,}$$

$$(x_n, y_n) = \frac{1}{2^{n-1}} (\cos 0, \sin 0) = \frac{1}{2^{n-1}} (1, 0)$$

(ii) $n = 3l + 2$ ($l \geq 0$) のとき

$$\frac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi = \frac{2(3l+4)(3l+1)}{3}\pi = \left(6l^2 + 10l + 2 + \frac{2}{3}\right)\pi \text{ より,}$$

$$(x_n, y_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(iii) $n = 3l + 3$ ($l = 0$) のとき

$$\frac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi = \frac{2(3l+5)(3l+2)}{3}\pi = \left(6l^2 + 14l + 6 + \frac{2}{3}\right)\pi \text{ より,}$$

$$(x_n, y_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

ここで, $\sum_{k=1}^n x_k = S_n$, $x_{3n-2} + x_{3n-1} + x_{3n} = s_n$ とおくと,

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8}$$

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^n s_k = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{\frac{5}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7}$$

また, $|x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$ より, $n \rightarrow \infty$ のとき $x_n \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n} + x_{3n+1}) = \frac{5}{7}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n+1} + x_{3n+2}) = \frac{5}{7}$$

同様にして, $\sum_{k=1}^n y_k = T_n$, $y_{3n-2} + y_{3n-1} + y_{3n} = t_n$ とおくと,

$$t_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$T_{3n} = \sum_{k=1}^n t_k = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

また, $|y_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$ より, $n \rightarrow \infty$ のとき $y_n \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{3n} + y_{3n+1}) = \frac{3\sqrt{3}}{7}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{3n+1} + y_{3n+2}) = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

以上より, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \frac{5}{7}$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{3\sqrt{3}}{7}$

[解 説]

大変な計算量で, やっと B5 版 2 枚の量でまとまりました。なお, (1)では \times で漸化式をつくりましたが, n が 1 つとびのタイプになってしまい, この後ややこしい計算が待ち構えているという気がしましたが, これは杞憂に過ぎませんでした。

4

問題のページへ

(1) さいころを n 回投げたとき、同じ目が続けて出ない確率は、 $1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ となるので、 $p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ である。

(2) さいころを n 回投げたとき、同じ目の出るのが 3 以上離れているのは、3 回目以降に直前の 2 回の目と異なる目が出ればよいので、

$$p_3 = 1 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{4}{6}\right)^{n-2} = \frac{5}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$\text{同様に考えて、} p_4 = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \left(\frac{3}{6}\right)^{n-3} = \frac{5}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$p_5 = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \left(\frac{2}{6}\right)^{n-4} = \frac{5}{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$$

$$p_6 = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-5} = \frac{5}{54} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}$$

また、同じ目の出るのが 7 以上離れている場合はないので、 $p_k = 0$ ($k \geq 7$)

(3) n 回の試行において、同じ目が続くことはなく、しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する場合は、同じ目が出るどの 2 つの試行も 2 以上離れている場合から、同じ目が出るどの 2 つの試行も 3 以上離れている場合を除いたものなので、その確率は、

$$p_2 - p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{5}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

[解 説]

問題文の読解力をみるものです。具体的に考えていけば、内容は平易であることがわかりますが、イライラするとミスをしてしまいそうです。

5

問題のページへ

(1) $C_1: x^2 + y^2 = 1 \dots\dots$, $C_2: x^2 + (y - \sin\alpha)^2 = 1 \dots\dots$

に対して,

と x 軸との交点は, $y = 0$ として,

$$x^2 = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha, \quad x = \pm \cos\alpha$$

よって, $l_A: x = \cos\alpha$, $l_B: x = -\cos\alpha$

また, より $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, より $y = \sin\alpha \pm \sqrt{1-x^2}$ と

なるので,

$$\begin{aligned} V_1(\alpha) &= \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \pi (\sin\alpha + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \pi (1-x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\cos\alpha} (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{1-x^2}) dx \end{aligned}$$

ここで, 右図の網点部の面積から,

$$\begin{aligned} \int_0^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \cos\alpha \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos\alpha \sin\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(\alpha) &= 2\pi \sin^2\alpha \cos\alpha + 4\pi \sin\alpha \left(\frac{1}{2} \cos\alpha \sin\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 4\pi \sin^2\alpha \cos\alpha + \pi^2 \sin\alpha - 2\pi\alpha \sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(\alpha) &= \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \pi (1-x^2) dx - \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \pi (\sin\alpha - \sqrt{1-x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\cos\alpha} (-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{1-x^2}) dx \end{aligned}$$

したがって, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 2\pi \int_0^{\cos\alpha} 2\sin^2\alpha dx = 4\pi \sin^2\alpha \cos\alpha$

(2) (1)より, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\pi(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$

ここで, $\cos\alpha = t$ とし, $0 < t < 1$ において $f(t) = t - t^3$ とおくと,

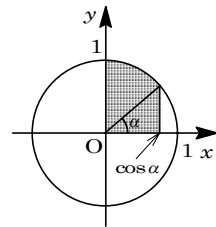
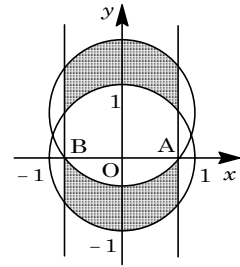
$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi f(t)$ となり,

$$f'(t) = 1 - 3t^2 = (1 - \sqrt{3}t)(1 + \sqrt{3}t)$$

右表より, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(t)$ は最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$

をとる。よって, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値は,

$$4\pi \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3}\pi \text{ である。}$$



t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

[解 説]

積分の標準題です。計算も難しくなくホッとします。