$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ なので，$z^2\gg 3$ より，

$$x^2-y^2\geqq 3\cdots\cdots\cdots①,\ \ 2xy\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\bar{z}=x-yi$，$-\dfrac{5}{z}=-\dfrac{5}{x-yi}=-\dfrac{5(x+yi)}{x^2+y^2}$ なので，$\bar{z}\gg -\dfrac{5}{z}$ より，

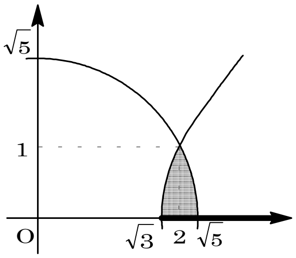
$$x\geqq -\frac{5x}{x^2+y^2},\ \ -y\geqq -\frac{5y}{x^2+y^2}$$

$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ で，$x(x^2+y^2+5)\geqq 0\cdots\cdots\cdots③$，$y(x^2+y^2-5)\leqq 0\cdots\cdots\cdots④$

②より $xy\geqq 0$，③より $x\geqq 0$ なので，

$$x\geqq 0,\ \ xy\geqq 0,\ \ y(x^2+y^2-5)\leqq 0,\ \ x^2-y^2\geqq 3$$

z の範囲を図示すると，右図の網点部および太線部となる。ただし，境界はすべて含む。



(2)　z と $3i$ の距離が最小となるのは，右図より，z が曲線 $x^2-y^2=3$ 上にあるときなので，

$$|z-3i|^2=x^2+(y-3)^2=(y^2+3)+(y-3)^2$$
$$=2y^2-6y+12=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$$

$0\leqq y\leqq 1$ より，$y=1$ のとき $|z-3i|^2$ は最小値 8 をとる。

よって，$|z-3i|$ の最小値は $2\sqrt{2}$，このとき $z=2+i$ である。

[解 説]

(1)は，式を変形せずに共通部分を図示した方が，かえって近道です。積が 0 以上や 0 以下というのはアブナイですから。

© 電送数学舎 2001

2

問題のページへ

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

接点を$(t,\ t^4+t^3-3t^2)$とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots①$$

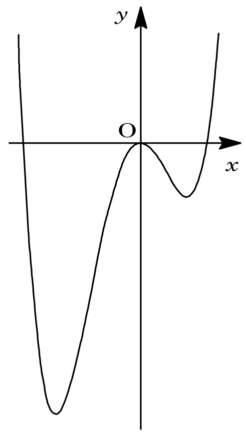
①が点$(0,\ a)$を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$

$$=-6t(2t-1)(t+1)$$



点$(0,\ a)$を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

すると，右表において$2>\dfrac{5}{16}$なので，$a=2$のときである。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$

[解　説]

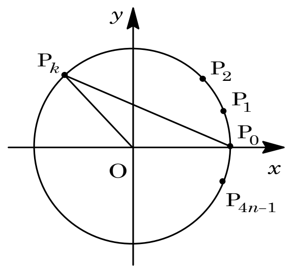
問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

© 電送数学舎 2001

3

問題のページへ

(1)　$\angle P_0OP_k = \dfrac{2\pi}{4n}k = \dfrac{\pi}{2n}k$ であり，条件より $P_0P_k \geqq \sqrt{2}$ なので $P_0P_k{}^2 \geqq 2$



$\triangle P_0OP_k$ に余弦定理を適用して，

$$1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2n}k \geqq 2$$

$\cos\dfrac{\pi}{2n}k \leqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2n}k \leqq \dfrac{3\pi}{2}$

よって，$n \leqq k \leqq 3n$

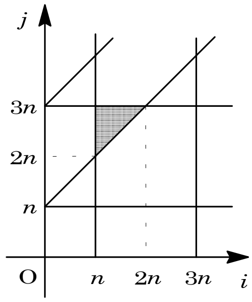
(2)　P_0 を 1 つの頂点とする三角形を考え，他の頂点を P_i，P_j $(i<j)$ とおくと，

$P_0P_i \geqq \sqrt{2}$ から，$n \leqq i \leqq 3n$ ………①

$P_iP_j \geqq \sqrt{2}$ から，$i+n \leqq j \leqq i+3n$ ………②

$P_jP_0 \geqq \sqrt{2}$ から，$4n-3n \leqq j \leqq 4n-n$

$$n \leqq j \leqq 3n \text{ ………③}$$



①②③を満たす領域は右図のようになり，この領域内の $(i,\ j)$ の組の個数は，

$$\sum_{i=n}^{2n}\{3n-(i+n)+1\} = \sum_{i=n}^{2n}(2n-i+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

P_1 を 1 つの頂点とする三角形，P_2 を 1 つの頂点とする三角形，……，P_{4n-1} を 1 つの頂点とする三角形についても同数となり，また条件を満たす三角形を重複して 3 回数えていることより，求める個数 $g(n)$ は，

$$g(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot 4n \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$$

[解 説]

(2)は格子点の個数を対応させて数えました。よく見かける頻出題です。

© 電送数学舎 2001

4

問題のページへ

(1)　$g_n(k-1) \geqq g_n(k)$ より，$g_n(k) - g_n(k-1) \leqq 0$ なので，$f\left(\dfrac{k\pi}{3n}\right) \leqq 0$ ………①

さて，$f(x) = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = (2\cos x - 3)(2\cos x - 1)$

$f(x) \leqq 0$ とすると，$\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$ なので，①より $\cos\dfrac{k\pi}{3n}x \geqq \dfrac{1}{2}$ ………②

$2 \leqq k \leqq 3n$ から，$\dfrac{2\pi}{3n} \leqq \dfrac{k\pi}{3n} \leqq \pi$ となり，②を満たすのは，$\dfrac{2\pi}{3n} \leqq \dfrac{k\pi}{3n} \leqq \dfrac{1}{3}\pi$

よって, $2 \leqq k \leqq n$ となり，求める k は，$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$

すると，$g_n(k-1) > g_n(k)$ となるのは $2 \leqq k \leqq n-1$，また $g_n(k-1) = g_n(k)$ となるのは $k = n$，さらに $g_n(k-1) < g_n(k)$ となるのは $n+1 \leqq k \leqq 3n$ なので，

$$g_n(1) > g_n(2) > \cdots > g_n(n-1) = g_n(n) < g_n(n+1) < \cdots < g_n(3n)$$

よって，$g_n(k)$ が最小となる k は，$n-1$ または n である。

(2)　(1)より，$G_n = g_n(n) = f\left(\dfrac{\pi}{3n}\right) + f\left(\dfrac{2\pi}{3n}\right) + \cdots\cdots + f\left(\dfrac{n\pi}{3n}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{\pi}{3n}k\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$$= \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2 x - 8\cos x + 3)\,dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2x - 8\cos x + 5)\,dx$$

$$= \frac{3}{\pi}\Big[\sin 2x - 8\sin x + 5x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{21\sqrt{3}}{2\pi} + 5$$

[解 説]

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が 1 つの問題にうまく収まっています。

© 電送数学舎 2001

5　　問題のページへ

(1) (i)　$n=1$ のとき　$b_1=c_1=1-a_1$ より，$b_1 \geqq c_1$ は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$b_k \geqq c_k$ と仮定すると，$b_k-c_k \geqq 0$

$$b_{k+1}-c_{k+1}=(1-a_{k+1})b_k-(c_k-a_{k+1}) \geqq a_{k+1}(1-b_k)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a_n \geqq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ より，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{2}$ となるので，$\dfrac{1}{2} \leqq 1-a_n \leqq 1$

よって，$b_k=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k) \leqq 1$ から，$a_{k+1}(1-b_k) \geqq 0\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$b_{k+1}-c_{k+1} \geqq 0$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対し，不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つ。

(2)　条件より，ある n に対して，$b_{n+1}-c_{n+1}=(b_n-c_n)+a_{n+1}(1-b_n)=0$

ここで，②より $a_{n+1}(1-b_n) \geqq 0$ なので，$b_n-c_n \leqq 0$

ところが, (1)より $b_n-c_n \geqq 0$ なので，$b_n-c_n=0$ となる。

(3)　$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)$ で，$0 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq c_3 \leqq 1$

ところが，$b_3=\dfrac{1}{2}$ のとき, (1)より $c_3 \leqq \dfrac{1}{2}$ となるので，$c_3=\dfrac{1}{2}$ である。

さて，$b_3=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots③$，$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$

③より，$1-(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)-a_1a_2a_3=\dfrac{1}{2}$

④を代入して，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots⑤$

また, (2)より $b_3=c_3=\dfrac{1}{2}$ のとき，$b_2=c_2$ なので,

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)，\ a_1a_2=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

(i)　$a_1=0$ のとき　⑤より $a_2a_3=0$

$a_2=0$ のとき③より $a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_3=0$ のとき③より $a_2=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$a_1 \neq 0$ のとき　⑥より $a_2=0$ で, ⑤より $a_3a_1=0$ なので $a_3=0$

このとき, ③より $a_1=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

すると，このいずれの組も，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ から $n \geqq 4$ において $a_n=0$ となるので，求める数列 $\{a_n\}$ は全部で 3 種類存在する。

[解 説]

思考がなめらかに流れていくように，設問に工夫がいろいろ施されています。

© 電送数学舎 2001