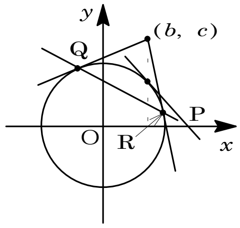
1

問題のページへ



$Q(x_1,\ y_1)$, $R(x_2,\ y_2)$ とおくと, Q, R における接線は,

$$x_1x + y_1y = a^2,\ \ x_2x + y_2y = a^2$$

これらの接線は, ともに点 $(b,\ c)$ を通るので,

$$bx_1 + cy_1 = a^2 \cdots\cdots①,\ \ bx_2 + cy_2 = a^2 \cdots\cdots②$$

ここで, 方程式 $bx + cy = a^2$ ……③を考えると, これは直線を表し, ①より点 Q を通り, ②より点 R を通ることがわかる。すなわち, ③は直線 QR を表す。

さて, 点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線は,

$$bx + \sqrt{a^2-b^2}\,y = a^2$$

x 軸との交点は, $x = \dfrac{a^2}{b}$, $y = 0$ より, 点 $P\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ となる。

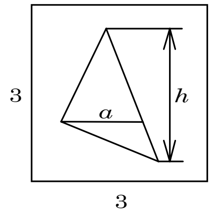
そこで, $(x,\ y) = \left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ を③に代入すると, ③が成立することがわかるので, 直線 QR は点 P を通る。

[解 説]

毎年のように出題されてきた有名問題です。そして, 上記の解はその有名な解法です。

2

問題のページへ



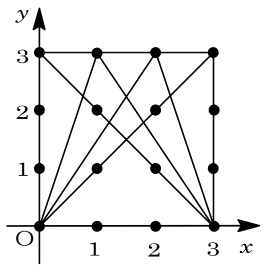
1 辺の長さ 3 の正方形の内部または辺上に頂点のある三角形を考え，右図のように長さ a, h を決めると，三角形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ah\leqq\frac{1}{2}\cdot3\cdot3=\frac{9}{2}$$

これより，$S=\frac{9}{2}$ となるのは $x=y=3$，すなわち三角形の少なくとも 1 つの辺が，正方形と辺を共有するときである。

さて，ここで条件を満たす 16 個の格子点から 3 個の格子点を選ぶ場合の数は ${}_{16}\mathrm{C}_3=560$ 通りである。

また，3 個の格子点を結んでできる三角形の面積 S が，$S=\frac{9}{2}$ となるのは，次の 2 つの場合がある。



(i)　三角形の 1 辺だけが正方形と辺を共有するとき

1 つの共有辺に対して，三角形が 2 通りずつ決まるので，$2\times4=8$ 通りある。

(ii)　三角形の 2 辺が正方形と辺を共有するとき

直角二等辺三角形となる場合なので，4 通りある。

(i)(ii)より，合わせて $8+4=12$ 通りとなる。

以上より，$S=\frac{9}{2}$ となる確率は，$\frac{12}{560}=\frac{3}{140}$ となる。

[解　説]

たくさんの場合分けが必要なのではないかと思いましたが，$S=\frac{9}{2}$ が正方形の面積の半分であることがわかり，ホッとしました。しかし，前半の論理は直観的には明らかなのですが，記述するのは手間がかかります。

3

問題のページへ

まず, 8 以上の整数 x は, 0 以上の整数 m, n を用いて, $x=3m+5n$ の形に表せることを示す。

$n=0$ のとき $x=3m$ となり, $m\geqq 0$ より x は 3 以上の 3 の倍数をすべて表すことができる。

$n=1$ のとき $x=3m+5=3(m+1)+2$ となり, $m+1\geqq 1$ より x は 3 で割った余りが 2 となる 5 以上の整数をすべて表すことができる。

$n=2$ のとき $x=3m+10=3(m+3)+1$ となり, $m+3\geqq 3$ より x は 3 で割った余りが 1 となる 10 以上の整数をすべて表すことができる。

以上より, 8 以上の整数 x は, $x=3m+5n$ の形に表せる。

さて, $(m,\ n)=(1,\ 1)$ で $x=8$ となるので, 8 より小さい自然数 x が $x=3m+5n$ の形に表せるのは, $(m,\ n)=(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の場合だけであり, 順に $x=3,\ 6,\ 5$ となる。

すると, 0 以上の整数 m, n を用いて, $x=3m+5n$ とは表すことができない自然数 x は 1, 2, 4, 7 だけである。

[解 説]

いきなり 8 以上の整数がすべて $3m+5n$ の形で表せることがわかったわけではありません。m, n に 0 以上の整数を具体的にあてはめて推測をしました。ただ, 3 と 5 が互いに素なので, 整数 m, n を用いて $3m+5n$ の形で, 任意の整数が表せるということは, 基本の 1 つです。

4

問題のページへ

一般的に$[x]\leqq x<[x]+1$より，$x-1<[x]\leqq x$なので，

$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}\leqq\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

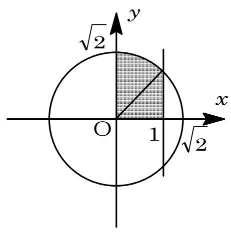
各辺で$k=1$から$k=n$までの和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

ここで，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$とおくと，区分求積法を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$



また，$c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}$とすると，

$$c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{n}{n^2}=b_n-\frac{1}{n}$$

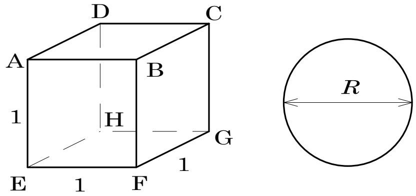
$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

すると，$c_n<a_n\leqq b_n$で$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

[解 説]

はさみうちの原理と区分求積法を用いる融合問題です。それをすばやく見抜ける眼力が必要です。

5　　　　問題のページへ



(1)　立方体 X の 1 辺の長さを 1, 球 Y の直径を R とすると, 条件より,

$$1^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3,\ \ R^3=\frac{6}{\pi}\cdots\cdots\text{①}$$

まず, X の頂点間の距離は$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ のいずれかである。

また①より, $1<R^3<2\sqrt{2}$ なので, $1<R<\sqrt{2}$ ………②

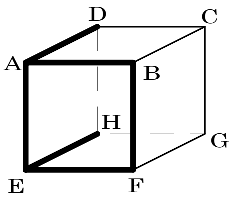
これより, Y の内部に X の頂点を 2 つ含むことはできる。しかし, X には距離がすべて 1 の 3 つの頂点は存在しないので, Y の内部に X の頂点を 3 つ含むことはできない。

したがって, Y の内部に含まれる X の頂点の最大数は 2 である。

(2)　(1)より, 2 頂点 A と E はともに Y の内部に含むことができるので, 5 つの辺 AE, AB, AD, EF, EH は Y の内部と共通の点をもつ。

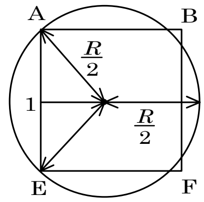
さて, 次に X の 6 つの辺と Y の内部が共通の点をもつとすると, 3 つの場合が考えられる。

(i)　X の 2 つの頂点が Y の内部に含まれるとき



頂点 A と E が Y に含まれるとし, ②より, 6 つの辺 AE, AB, AD, EF, EH, BF と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。

ここで, 球 Y の大円が 2 頂点 A, E を通る場合を考え, 辺 BF と共通の点をもつ場合を考えると, 右図より,



$$\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{R}{2}\geqq 1\cdots\cdots\text{③}$$

③ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{R^2-1}+R\geqq 2$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{R^2-1}\geqq 2-R$ ………④

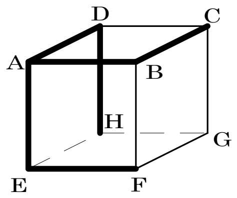
②より, ④ $\Leftrightarrow$ $R^2-1\geqq(2-R)^2$ $\Leftrightarrow$ $R\geqq\dfrac{5}{4}$ ………⑤

①より, ⑤ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{6}{\pi}\geqq\left(\dfrac{5}{4}\right)^3$ $\Leftrightarrow$ $\pi\leqq\dfrac{6\cdot 4^3}{5^3}=3.072$ ………⑥

⑥は$\pi>3.14$ より成立しない。すなわち, ③は不成立となり, 2 頂点 A, E が Y の内部に含まれる場合, 辺 BF とは共通の点をもたない。よって, この場合はありえない。

(ii)　X の 1 つの頂点だけが Y の内部に含まれるとき

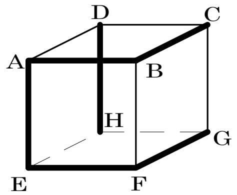
頂点 A だけが Y に含まれるとし, ②より, 6 つの辺 AE, AB, AD, EF, BC, DH と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。



このとき，立方体 X と球 Y を面 AEFB を含む平面に正射影して考えると，頂点 A は Y を正射影した円に含まれ，また辺 BC と Y の内部が共通の点をもつことより，点 B も Y を正射影した円に含まれる。

すると，(i)よりこの円は辺 EF と共通の点をもたないことより，この場合はありえない。

(iii) X の頂点が Y の内部に含まれないとき



②より, 6 つの辺 AE, AB, EF, BC, FG, DH と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。

このとき，(ii)と同じく，立方体 X と球 Y を面 AEFB を含む平面に正射影して考えると，辺 BC，FG と Y の内部が共通の点をもつことより，点 B，F がともに Y を正射影した円に含まれる。

すると，(i)よりこの円は辺 AE と共通の点をもたないことより，この場合はありえない。

(i)(ii)(iii)より, Y の内部と X の 6 つの辺が共通の点をもつことはない。

以上より, Y の内部と共通の点をもつ X の辺の最大数は 5 である。

[解 説]

(1)は基本的ですが，(2)については難でした。(1)を使えば，5 辺の場合には条件を満たすことはすぐにわかるのですが，その後, 6 辺についての考察がたいへんでした。球の内部に含まれる頂点の個数をもとに場合分けをしましたが，内部に含まれる辺を決めるプロセスは，パズルに向かっていく気分で解いていきましたので，その詳細は省略しました。時間無制限で解くには楽しい問題でしょうが……。