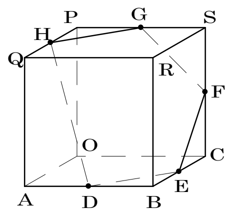
1

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots①,\ \vec{f}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdots\cdots②,\ \vec{g}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{3}{2}\vec{c}=2\vec{f}-\vec{g}$，$\vec{c}=\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots④$



①④より，$\vec{a}=\vec{d}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑤$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\right)$

$$=\frac{1}{2}\vec{d}+\vec{f}-\frac{1}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑥$$

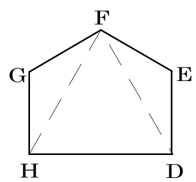
(2)　⑥より $\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}=1$ なので，点 E は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

また③④より，$\vec{p}=\vec{g}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}\right)=-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{4}{3}\vec{g}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{4}{3}\vec{g}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{d}-\vec{f}+\dfrac{3}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦より $\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{3}{2}=1$ なので，点 H は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

(3)　五角形 DEFGH において，$\mathrm{DE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FG}=\mathrm{GH}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ となり，また $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ より $\mathrm{HD}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$，さらに $\mathrm{FH}=\mathrm{FD}=\mathrm{HD}$ なので，

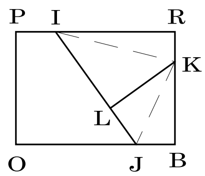


$$\triangle\mathrm{FGH}=\triangle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{FHD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$$

五角形 DEFGH の面積は，$2\sqrt{3}\times 2+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

(4)　点 K から五角形 DEFGH に下ろした垂線の足を L とすると，対称性より L は長方形 OPRB 上にある。また長方形 OPRB と線分 GH，DE との交点をそれぞれ I, J とおくと，



$$\mathrm{IR}=\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{2}=3\sqrt{2},\ \mathrm{JB}=\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3=5\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{IJ}\cdot\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DH}\cdot\mathrm{KL}=\sqrt{6}\mathrm{KL}$$

よって，$\sqrt{6}\,\mathrm{KL}=5\sqrt{2}$，$\mathrm{KL}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ より，五角錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{50}{3}$

[解 説]

(4)では, OR が五角形 DEFGH に垂直であることを用いると計算量が減ります。

2

問題のページへ

(1)　$x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①から, $k\geqq 2$ で,

$$x_k=n+k-1-(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x_i\geqq 1$　$(1\leqq i\leqq k)$ なので，②より $1\leqq x_k\leqq n+k-1-(k-1)=n$

$k=1$ のときは $x_1=n$ となるので, $k\geqq 2$ の場合と合わせて $1\leqq x_k\leqq n$ となる。

(2)　$a(n,\ k+1)$ は $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n+k$ を満たす自然数解の個数を表す。

ここで, (1)より $1\leqq x_{k+1}\leqq n$ なので，$x_{k+1}=n-j+1$　$(1\leqq j\leqq n)$ のときは,

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+(n-j+1)=n+k,\quad x_1+x_2+\cdots+x_k=j+k-1$$

となり，この式を満たす自然数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ の個数は $a(j,\ k)$ である。

したがって，$a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$

(3)　まず，$a(n,\ 1)$ は①より $x_1=n$ の解の個数より，$a(n,\ 1)=1$

(2)より，$a(n,\ 2)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 1)=\sum_{j=1}^{n}1=n$

$$a(n,\ 3)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 2)=\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$a(n,\ 4)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 3)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j(j+1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

以上より，$a(n,\ k)=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-2)}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!}$ と推測できる。

(4)　$1\leqq j\leqq n$ に対して，$a(j,\ k)=\dfrac{j(j+1)\cdots\cdots(j+k-2)}{(k-1)!}$ と仮定したとき,

$$a(n,\ k+1)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n}j(j+1)\cdots(j+k-2)$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\{j(j+1)\cdots(j+k-2)(j+k-1)-(j-1)j\cdots(j+k-2)\}$$

$$=\frac{n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)}{k!}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

[解 説]

おもしろい誘導のついた問題です。しかし, ①の自然数解の個数は○を $n+k-1$ 個並べ，その間の $n+k-2$ か所に $k-1$ 個の仕切りを 1 つずつ割り込ませるという有名な方法で直接的に求まってしまいます。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=ae^{x}+be^{-x}$，$f'(x)=ae^{x}-be^{-x}=e^{-x}(ae^{2x}-b)$

$f'(x)=0$ の解は，$e^{2x}=\dfrac{b}{a}$ より $x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{b}{a}$

$\alpha=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{b}{a}$ とおくと，$x=\alpha$ のとき $f(x)$ は極小かつ最小となるので，最小値は $e^{\alpha}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ より，

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\alpha)=a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{ab}$$

(2)　まず，$f(2\alpha-x)=ae^{2\alpha-x}+be^{-2\alpha+x}=ae^{2\alpha}e^{-x}+be^{-2\alpha}e^{x}$

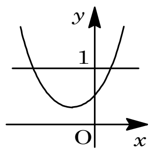
(1)より，$e^{2\alpha}=\dfrac{b}{a}$ なので，

$$f(2\alpha-x)=a\cdot\frac{b}{a}e^{-x}+b\cdot\frac{a}{b}e^{x}=be^{-x}+ae^{x}=f(x)$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\alpha$ に関して対称である。

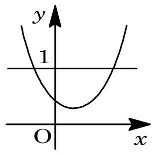
(3)　対称軸 $x=\alpha$ の位置で場合分けをする。

(i)　$\alpha\leqq 0$ $\left(0<\dfrac{b}{a}\leqq 1\right)$ のとき



$f(0)=a+b$ より，$f(x)=1$ が $x\geqq 0$ にただ 1 つの解をもつ条件は，$a+b\leqq 1$ である。

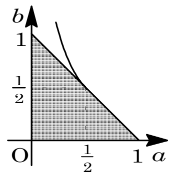
(ii)　$\alpha>0$ $\left(\dfrac{b}{a}>1\right)$ のとき



$f(0)=a+b$，$f(\alpha)=2\sqrt{ab}$ より，$f(x)=1$ が $x\geqq 0$ にただ 1 つの解をもつ条件は，$a+b<1$ または $2\sqrt{ab}=1$，すなわち $a+b<1$ または $b=\dfrac{1}{4a}$ である。

(i)(ii)より，$a+b\leqq 1$ $(0<b\leqq a)$，$a+b<1$ または $b=\dfrac{1}{4a}$ $(b>a)$

求める a, b の範囲を図示すると右図のようになる。なお，領域の境界は $a+b=1$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a<1\right)$ のみを含む。



[解 説]

(2)の y 軸に平行なある直線というのは $x=\alpha$ しかないのが，(1)の増減表からわかります。それを数式を用いて示せば事足ります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

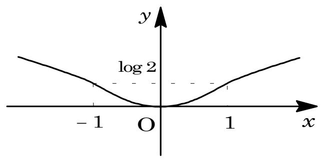
(1)　$f(x)=\log(x^2+1)$，$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\log 2$	↗	∞

ここで，$f(-x)=f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となるので，

極小値 0　$(x=0)$，変曲点 $(\pm1,\ \log 2)$



(2)　$y=g(x)$ のグラフも y 軸対称なので，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接するとき，$\alpha\geqq 0$ として，

$$f(\alpha)=g(\alpha)\cdots\cdots①,\quad f'(\alpha)=g'(\alpha)\cdots\cdots②$$

①より $\log(\alpha^2+1)=a\alpha^2+b\cdots\cdots③$，②より $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=2a\alpha\cdots\cdots④$

④から $a\alpha(\alpha^2+1)=\alpha$，$\alpha(a\alpha^2+a-1)=0\cdots\cdots\cdots⑤$

(i)　$\alpha=0$ のとき　⑤は満たされており，③から $b=0$

(ii)　$\alpha>0$ のとき　⑤から $a\alpha^2+a-1=0$，$a=0$ とすると不成立なので $a\neq 0$

このとき，$\dfrac{1-a}{a}>0$ すなわち $0<a<1$ で，$\alpha^2=\dfrac{1-a}{a}$，$\alpha=\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑥を③に代入して，$\log\left(\dfrac{1-a}{a}+1\right)=a\cdot\dfrac{1-a}{a}+b$，$b=a-1-\log a\cdots\cdots\cdots⑦$

(i)(ii)より，求める条件は，$b=0$（a は任意）または $b=a-1-\log a$　$(0<a<1)$

(3)　$a=\dfrac{1}{4}$，$b\neq 0$ のとき，⑥より $\alpha=\sqrt{3}$，⑦より $b=-\dfrac{3}{4}+\log 4$

このとき，$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ で $f(x)\leqq g(x)$ より，求める面積を S とすると，

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}+\log 4-\log(x^2+1)\right\}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}+\log 4\right)dx=\frac{3\sqrt{3}}{12}+\left(-\frac{3}{4}+\log 4\right)\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\log 4$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\log(x^2+1)\,dx=\Big[x\log(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

また，$x=\tan\theta$ と置換すると，

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=2\sqrt{3}-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

以上より，$S=2\left\{-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\log 4-\left(\sqrt{3}\log 4-2\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}=3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

[解 説]

微積分の総合問題です。確実な計算力が問われます。