

1

問題のページへ

$$(1) Ae_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

条件より,  $ab + cd = 0$  .....

$$(2) Af_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}, Af_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}$$

条件より,  $(a+b)(a-b) + (c+d)(c-d) = 0$

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \dots\dots\dots$$

$$(3) Au = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 \\ cu_1 + du_2 \end{pmatrix}, Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}$$

条件より,  $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$  .....

このとき,  $Au$  と  $Av$  の内積は,

$$\begin{aligned} & (au_1 + bu_2)(av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)(cv_1 + dv_2) \\ &= (a^2 + c^2)u_1v_1 + (ab + cd)u_1v_2 + (ab + cd)u_2v_1 + (b^2 + d^2)u_2v_2 \\ &= (a^2 + c^2)(u_1v_1 + u_2v_2) + (ab + cd)(u_1v_2 + u_2v_1) \quad (\text{より}) \\ &= 0 \quad (\text{ , より}) \end{aligned}$$

### [ 解 説 ]

(1)(2)の誘導の意味を考えると, (3)は成分計算をして, 第1問を着実にゲットするのが正しい態度です。

2

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 &= \{f'(t)\cos t - f(t)\sin t\}^2 + \{f'(t)\sin t + f(t)\cos t\}^2 \\
 &= \{f'(t)\}^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + \{f(t)\}^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \\
 &= \{f'(t)\}^2 + \{f(t)\}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } L = \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2 &= \{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2 + 2|f(t)||f'(t)| \\
 &= (|f(t)| + |f'(t)|)^2
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2} = |f(t)| + |f'(t)|$$

$$a \leq b \text{ より, } L = \int_a^b \sqrt{\{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2} dt = \int_a^b \{|f(t)| + |f'(t)|\} dt$$

$$(3) \quad f(t) = e^{-\sqrt{t}}, \quad f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}} \text{ から,}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \{|f(t)| + |f'(t)|\} dt &= \int_1^4 \left( e^{-\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}} \right) dt \\
 &= \int_1^2 \left( e^{-s} + \frac{1}{2s}e^{-s} \right) 2s ds \quad (s = \sqrt{t} \text{ とおく}) \\
 &= \int_1^2 (2s+1)e^{-s} ds = -[(2s+1)e^{-s}]_1^2 + \int_1^2 2e^{-s} ds \\
 &= -\left( \frac{5}{e^2} - \frac{3}{e} \right) - 2\left( \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} \right) = \frac{5}{e} - \frac{7}{e^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, (2)より, } L = \frac{5}{e} - \frac{7}{e^2}$$

## [ 解 説 ]

(2)についても(1)との対比で証明は難しくなく, (3)は部分積分の計算だけなので, 見かけよりはかなり簡単です。

3

問題のページへ

(1)  $C: y = x^2$  ……

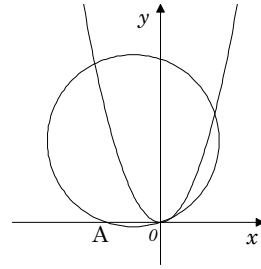
また,  $D_a: (x+1)^2 + (y-a)^2 = 1+a^2$  より,

$$x^2 + y^2 + 2x - 2ay = 0 \dots\dots$$

を に代入して,

$$x^4 + (1-2a)x^2 + 2x = 0$$

$$x = 0, \quad x^3 + (1-2a)x + 2 = 0 \dots\dots$$



条件より, が  $x > 0$  で解をもつので, を変形して,  $x^3 + x + 2 = 2ax$

$$f(x) = x^3 + x + 2 \text{ とおくと, } f'(x) = 3x^2 + 1, \quad f''(x) = 6x$$

$f(x)$  は単調増加で, 曲線  $y = f(x)$  は,  $x < 0$  で上に凸,  $x > 0$  で下に凸.

$y = f(x)$  と  $y = 2ax$  が接するとき,

接点を  $x = t$  とするとき,

$$f(t) = 2at \text{ より, } t^3 + t + 2 = 2at \dots\dots$$

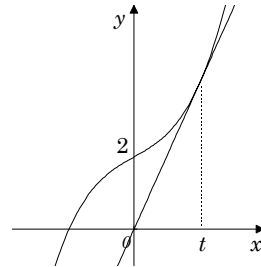
$$f'(t) = 2a \text{ より, } 3t^2 + 1 = 2a \dots\dots$$

$$\text{を に代入して, } t^3 + t + 2 = t(3t^2 + 1)$$

$$2t^3 - 2 = 0, \quad t = 1$$

$$\text{より, } a = 2$$

求める条件は, 図より  $a = 2$



(2) 2 定点  $O, A$  を通る円の半径が大きくなるに従って, 弧  $OA$  に対する鋭角の円周角は小さくなっていくことより,  $C$  と  $D_a$  が接するとき  $\angle APO$  は最大となる.

このとき(1)より,  $a = 2$  で  $t = 1$ , すなわち  $P(1, 1)$  となる.

また,  $D_a$  の中心は  $(-1, 2)$ , 半径は  $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  となる.

正弦定理を用いて,

$$\frac{OA}{\sin \angle APO} = 2\sqrt{5}, \quad \sin \angle APO = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

[ 解 説 ]

(1)の利用を考えると, (2)を図形的に考えるのは当然です。しかし, 図形的な性質をどこまで定量的に記述すればよいのか迷います。上の解の(2)の冒頭の 2 行がその一例で, 正弦定理を用いての記述も可能ですが, ここでは定性的な表現をしました。本年の東京工大の第 2 問の解でも同じように感じたのを思い出します。

4

問題のページへ

$$(1) \quad z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} z_0 = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} \cdot 2(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \quad z_2 = -\frac{1}{z_0} = \frac{\cos\pi + i \sin\pi}{2(\cos\theta + i \sin\theta)} = \frac{1}{2} \{ \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) \}$$

$$(3) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \theta - \frac{\pi}{3} < \theta < \pi - \theta$$

$$\angle P_0 O P_1 = \theta - \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ で,}$$

$$O P_0 = 2, \quad O P_1 = 1 \text{ から, } \angle O P_1 P_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって, } O P_0 \text{ は円の直径となり, } \angle O P_2 P_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ここで, } \angle P_0 O P_2 = (\pi - \theta) - \theta = \pi - 2\theta \text{ で,}$$

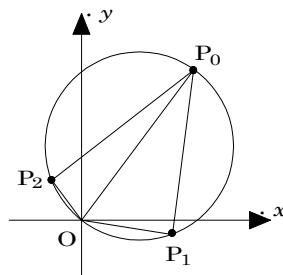
$$O P_0 = 2, \quad O P_2 = \frac{1}{2} \text{ から,}$$

$$\cos(\pi - 2\theta) = \frac{O P_2}{O P_0} = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \cos 2\theta = -\frac{1}{4}, \quad 2 \cos^2 \theta - 1 = -\frac{1}{4}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{以上より, } z_0 = 2 \left( \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} i$$



## [ 解説 ]

(3)では、最初は一般的に4点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが、たいへんな計算が待ち構えていました。そこで、これは何か特別な事情があると推測したところ、やはりその通りでした。この発見がポイントです。