1

解答解説のページへ

A, B, C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い，優勝者を決定する。

・1 試合目は A と B が戦う。

・自然数 n に対し，$n+1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に戦わなかった人が戦う。

・2 連勝した人が出た時点で，その人が優勝者となり，以後試合は行わない。

・すべての試合において，引き分けはないものとする。

A, B, C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし，p は $0<p<1$ を満たす実数とする。

・A と B の試合：勝つ確率は A と B のどちらも $\dfrac{1}{2}$ である。

・A と C の試合：A が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である。

・B と C の試合：B が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である。

n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　自然数 k に対し，a_{3k} を求めよ。

(3)　C が優勝する確率を求めよ。

(4)　1 以上 99 以下の自然数 N に対し $p=\dfrac{N}{100}$ であるとする。このとき C が優勝する確率が $\dfrac{1}{3}$ 以上になるような N の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を実数とし，座標平面上の曲線 $C: y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3) a の値が(2)で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線 C と(2)で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

lを正の実数とし，四面体OABCにおいて，各辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\frac{1}{2}l,\ \ \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=l,\ \ \mathrm{AB}=\mathrm{CA}=l,\ \ \mathrm{BC}=\sqrt{2}l$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，点 H は$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　点Hは3点A, B, Cが定める平面上に存在することを示せ。

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$の値を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{OHB}$の大きさを求めよ。

(4)　四面体OABCの体積Vを求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$-1<x<1$ に対して，$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$ とおく。ただし，対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$-1<x<1$ のとき，$f'(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2)　$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$ であることを示せ。

(3)　n が 2 以上の整数のとき，不等式 $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　与えられたルールの試合を行い，n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とする。

まず，1 試合目で優勝者が決定することはないので，$a_1=0$ である。

以下，各試合において，勝者を記していく。

2 試合目で優勝者が決定するのは，「A→A」または「B→B」の場合より，その確率は $a_2=\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)=1-p$ である。

3 試合目で優勝者が決定するのは，「A→C→C」または「B→C→C」の場合より，その確率は $a_3=\frac{1}{2}p\cdot p+\frac{1}{2}p\cdot p=p^2$ である。

4 試合目で優勝者が決定するのは，「A→C→B→B」または「B→C→A→A」の場合より，その確率は $a_4=\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p(1-p)$ である。

(2)　$3k$ 試合目で優勝者が決定するのは，$k\geqq 2$ において，

(i)　「(A→C→B)→(A→C→B)→…→(A→C→B)→(A→C→C)」のとき

このときの確率は，$\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{2}p\cdot p=\frac{1}{2}p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$ である。

(ii)　「(B→C→A)→(B→C→A)→…→(B→C→A)→(B→C→C)」のとき

このときの確率は，$\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{2}p\cdot p=\frac{1}{2}p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$ である。

(i)(ii)より，$a_{3k}=\frac{1}{2}p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}+\frac{1}{2}p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}=p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$

なお，この式は $k=1$ のときも成立している。

(3)　C が優勝するのは $3k$ 試合目であり，その確率 $P_{\rm C}$ は $P_{\rm C}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{3k}$ と表せる。

ここで，(2)から，a_{3k} は初項 p^2，公比 $\frac{1}{2}p(1-p)$ の等比数列であり，$0<p<1$ から $0<\frac{1}{2}p(1-p)<1$ となるので，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{3k}$ は収束し，

$$P_{\rm C}=\frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}=\frac{2p^2}{2-p+p^2}$$

(4)　$P_{\rm C}\geqq\frac{1}{3}$ のとき，$\frac{2p^2}{2-p+p^2}\geqq\frac{1}{3}$ から $6p^2\geqq p^2-p+2$ となり，$5p^2+p-2\geqq 0$

さて，自然数 $N\,(1\leqq N\leqq 99)$ に対し，$p=\frac{N}{100}$ とおくと，

$$\frac{N^2}{2000}+\frac{N}{100}-2\geqq 0,\ \ N^2+20N-4000\geqq 0,\ \ (N+10)^2\geqq 4100\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$64^2=4096$，$65^2=4225$ より，$(*)$は $N+10\geqq 65\ (N\geqq 55)$ となるので，$P_{\rm C}\geqq\frac{1}{3}$ を満たす N の最小値は 55 である。

［解 説］

有名な巴戦を題材にした確率問題です。細かく分かれた設問で構成され，複雑な条件設定はありません。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　曲線 $C: y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$ ……①に対して，a についてまとめると，

$$(x^2+2x)a+(x^3+2x^2+2-y)=0 \text{………②}$$

②が任意の a に対して成り立つ条件は，

$$x^2+2x=0 \text{………③},\quad x^3+2x^2+2-y=0 \text{………④}$$

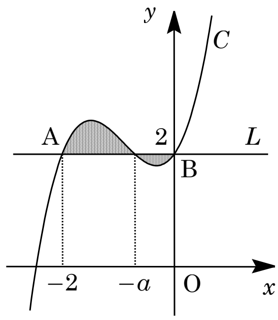
③より $x=0,\ -2$ となり，④から $x=0$ のとき $y=2$，$x=-2$ のとき $y=2$ である。

これより，曲線 C が通る 2 つの定点の座標は，$(-2,\ 2)$，$(0,\ 2)$ である。

(2)　$\mathrm{A}(-2,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ となり，直線 L の方程式は $y=2$ ……⑤である。

そして，C と L の交点は，①⑤より，$x^3+(a+2)x^2+2ax+2=2$ となり，

$$x^3+(a+2)x^2+2ax=0,\quad x(x+a)(x+2)=0$$



これより，$x=0,\ -a,\ -2$ となり，すべての交点が線分 AB 上にある条件は，$-2<-a<0$ から，

$$0<a<2$$

(3)　C と L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ は，

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{-2}^{-a}\{x^3+(a+2)x^2+2ax+2-2\}dx\\&\quad+\int_{-a}^{0}\{2-x^3-(a+2)x^2-2ax-2\}dx\\&=\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\Big]_{-2}^{-a}+\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\Big]_{0}^{-a}\\&=\frac{1}{4}(a^4-16)+\frac{a+2}{3}(-a^3+8)+a(a^2-4)+\frac{a^4}{4}+\frac{a+2}{3}\cdot(-a^3)+a^3\\&=\frac{1}{4}(2a^4-16)+\frac{a+2}{3}(-2a^3+8)+a(2a^2-4)\\&=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

これより，$S'(a)=0$ の解は $a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$ であり，$0<a<2$ において $S(a)$ の増減を調べると，右表のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	$\frac{1}{2}$	↗	

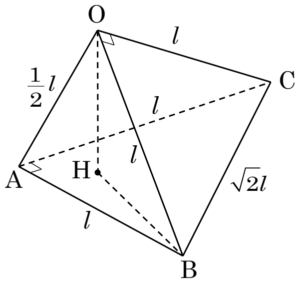
よって，$S(a)$ は $a=1$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

定積分と面積についての問題です。やや計算は面倒ですが。

3

問題のページへ



(1)　四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{8}\vec{b}+\dfrac{1}{8}\vec{c}$ のとき，

$$\vec{a}+\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}(\vec{a}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{8}(\vec{a}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$$

よって，点 H は平面 ABC 上に存在する。

(2)　$OA=\dfrac{1}{2}l$，$OB=OC=l$ から，$|\vec{a}|=\dfrac{1}{2}l$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=l$

$AB=CA=l$，$BC=\sqrt{2}l$ から，△OAB，△OAC，△OBC に余弦定理を適用して，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{8}l^2,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

ここで，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{8}(6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より，$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{8}|6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ となり，

$$|6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=36\cdot\frac{1}{4}l^2+l^2+l^2+12\cdot\frac{1}{8}l^2+12\cdot\frac{1}{8}l^2=14l^2$$

よって，$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{8}\sqrt{14l^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{8}l$ である。

(3)　$$\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HO}\cdot(\overrightarrow{HO}+\vec{b})=|\overrightarrow{HO}|^2+\overrightarrow{HO}\cdot\vec{b}=\frac{14}{64}l^2-\frac{1}{8}(6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{7}{32}l^2-\frac{1}{8}\left(6\cdot\frac{1}{8}l^2+l^2\right)=0$$

これより，$\angle OHB=90°$ である。

(4)　(3)と同様にすると $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HC}=0$ となり $\angle OHC=90°$ である。すると，$OH\perp HB$ かつ $OH\perp HC$ から，線分 OH は平面 ABC に垂直になる。

また，$\angle BAC=90°$ から $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}l^2$ となり，四面体 OABC の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}(\triangle ABC)\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l^2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}l=\frac{\sqrt{14}}{48}l^3$$

［解　説］

基本的な内容の空間ベクトルの四面体への応用問題です。なお，上記の解答例は，記述がやや省略ぎみです。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$-1<x<1$ のとき，$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$ に対して，

$$f(x)=\log(1+x)+(1-x)\log(1-x),\ \ f'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{-1+x+1+2x+x^2}{(1+x)^2(1-x)}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

これより，$-1<x<1$ における $f'(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	0	↗	

すると，$f'(x)\geqq 0$ である。

(2)　(1)より，$-1<x<1$ において，$f(x)$ は単調に増加する。ここで，$f(0)=0$ に注目すると，

$$f(x)<0\ (-1<x<0),\ \ f(x)>0\ (0<x<1)$$

よって，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$ である。

(3)　$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x}-\log(1-x)=\dfrac{\log(1-x^2)}{x}-\log(1-x)>0$ より，

$$\frac{\log(1-x^2)}{x}>\log(1-x)\quad(-1<x<1,\ x\neq 0)\cdots\cdots\cdots①$$

まず，2 以上の整数 n で $x=\dfrac{1}{n}$ とおくと，$0<x\leqq\dfrac{1}{2}<1$ となり，①より，

$$n\log\Bigl(1-\frac{1}{n^2}\Bigr)>\log\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr),\ \ \log\Bigl(\frac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^n>\log\Bigl(\frac{n-1}{n}\Bigr)$$

これより，$\dfrac{n-1}{n}<\Bigl(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^n\cdots\cdots\cdots②$

また，2 以上の整数 n で $x=-\dfrac{1}{n}$ とおくと，$-1<-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ となり，①より，

$$-n\log\Bigl(1-\frac{1}{n^2}\Bigr)>\log\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr),\ \ \log\Bigl(\frac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^n<-\log\Bigl(\frac{n+1}{n}\Bigr)$$

これより，$\Bigl(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^n<\Bigl(\dfrac{n+1}{n}\Bigr)^{-1}=\dfrac{n}{n+1}$ となり，

$$\Bigl(\frac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^{n+1}<\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^2-1}{n^2},\ \ \Bigl(\frac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^{n+1}<\frac{n-1}{n}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\Bigl(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\Bigl(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Bigr)^n$ である。

［解 説］

微分の不等式への応用問題です。(2)までの証明はスムーズに進みますが，その結果を(3)の不等式に接続する点について試行錯誤が必要です。そこを突破するきっかけは，問題文で与えられた $f(x)$ の式に対する違和感でした。要演習の 1 題です。