1

解答解説のページへ

ハート，スペード，クラブ，ダイヤの各マークのついた「A (エース)」，「2」，「3」のカードがそれぞれ 1 枚ずつ箱に入っている。カードは全部で 12 枚である。この箱から 1 枚ずつ無作為に取り出して，12 枚のカードを横一列に並べる。以下の問いに答えよ。

(1) 「A (エース)」のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) どの 2 枚の「A (エース)」のカードも連続して並ばない確率を求めよ。

(3) 「A (エース)」のカードの連続した並びが生じ，かつ，「A (エース)」のカードが 3 枚以上は連続して並ばない確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

三角形 ABC において，各辺の長さを $\mathrm{BC}=a$ ，$\mathrm{CA}=b$ ，$\mathrm{AB}=c$ とし，$a^2=5-\sqrt{2}-\sqrt{6}$ ，$b^2=1$，$c^2=4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ。

(2)　三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で，数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$b_1=c_1=1,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=b_n+2c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数nについて，$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$が成り立つことを示せ。

(2)　数列$\{\alpha b_n-c_n\}$が等比数列となるような実数αをすべて求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a を実数とし，座標平面上の曲線 $C : y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3)　a の値が(2)で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線 C と(2)で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　4 種類ずつのマークのついたカード「A」,「2」,「3」について，この合計 12 枚のカードを横一列に並べるとき，12! 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき,「A」のカードが 4 枚連続して並ぶ場合は，まず 4 枚の「A」の並べ方が 4! 通り，そして 4 枚の「A」を 1 枚のカードとみなし,「2」と「3」のカードと合わせて 9 枚の並べ方が 9! 通りであるので，その確率は,

$$\frac{4!\times 9!}{12!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{12\cdot 11\cdot 10}=\frac{1}{55}$$

(2)　どの 2 枚の「A」のカードも連続して並ばない場合は，まず「2」と「3」の 8 枚のカードを並べ，そのカードの間および両端の 9 か所から 4 か所を選び,「A」のカードを 1 枚ずつ並べるとすると，その確率は,

$$\frac{8!\times {}_9\mathrm{C}_4\times 4!}{12!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=\frac{14}{55}$$

(3)　「A」のカードが 3 枚だけ連続して並ぶ場合は，まず「2」と「3」の 8 枚のカードを並べ，そのカードの間および両端の 9 か所から 2 か所を選び，1 か所に 3 枚の「A」，もう 1 か所に 1 枚の「A」を並べるとすると，その確率は,

$$\frac{8!\times {}_9\mathrm{C}_2\times 2!\times 4!}{12!}=\frac{9\cdot 8\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=\frac{8}{55}$$

すると,「A」のカードの連続した並びが生じ，かつ,「A」のカードが 3 枚以上は連続して並ばない場合は,「A」のカードの連続した並びの枚数は 0 枚，2 枚，3 枚，4 枚のいずれかであることに注意すると，その確率は,

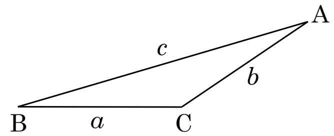
$$1-\frac{14}{55}-\frac{8}{55}-\frac{1}{55}=\frac{32}{55}$$

［解 説］

確率の基本的な問題です。(3)は設問の流れから，余事象の考え方を利用しています。

2

問題のページへ



(1)　△ABC について，$a^2=5-\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$b^2=1$，$c^2=4$ のとき，余弦定理から，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1+4-(5-\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2\cdot\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(2)　(1)から，$\cos^2\angle\mathrm{BAC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$ となり，

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\frac{8+2\sqrt{12}}{16}}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

すると，△ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ となる。

(3)　$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{12}$

すると，(1)から $\cos\angle\mathrm{BAC}=\cos\dfrac{\pi}{12}$ となり，$0<\angle\mathrm{BAC}<\dfrac{\pi}{2}$ から，

$$\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{12}$$

［解　説］

三角比の応用についての基本題です。(3)の値についても，初めて出合うものではないでしょう。

3

問題のページへ

(1)　$a_1=b_1=c_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2+a_n}$，$b_{n+1}=c_n$，$c_{n+1}=b_n+2c_n$ ……①によって定められる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$に対して，$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=b_1=c_1=1$から，$a_1=\dfrac{b_1}{c_1}$が成り立つ。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k=\dfrac{b_k}{c_k}$が成り立つと仮定すると，①より，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2+a_k}=\frac{1}{2+\frac{b_k}{c_k}}=\frac{c_k}{2c_k+b_k}=\frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}$$

よって，$n=k+1$のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての自然数nについて，$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$が成り立つ。

(2)　$\{\alpha b_n-c_n\}$が公比rの等比数列とすると，$\alpha b_{n+1}-c_{n+1}=r(\alpha b_n-c_n)$ ………②

また，①より，$\alpha b_{n+1}-c_{n+1}=\alpha c_n-(b_n+2c_n)=-b_n+(\alpha-2)c_n$ ………③

②③から，$r(\alpha b_n-c_n)=-b_n+(\alpha-2)c_n$となり，この式がつねに成立する条件は，$r\alpha=-1$かつ$-r=\alpha-2$である。

まとめると，$-(\alpha-2)\alpha=-1$となり，$\alpha^2-2\alpha-1=0$から，$\alpha=1\pm\sqrt{2}$

(3)　$r=2-\alpha$より，$\alpha=1\pm\sqrt{2}$のとき$r=2-(1\pm\sqrt{2})=1\mp\sqrt{2}$（複号同順）

また，②から$\alpha b_n-c_n=(\alpha b_1-c_1)r^{n-1}=(\alpha-1)r^{n-1}$となるので，

・$(\alpha,\ r)=(1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$のとき

$$(1+\sqrt{2})b_n-c_n=(1+\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})^{n-1}=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^{n-1} \text{ ………④}$$

・$(\alpha,\ r)=(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$のとき

$$(1-\sqrt{2})b_n-c_n=(1-\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})^{n-1}=-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{n-1} \text{ ………⑤}$$

④⑤より，$2\sqrt{2}\,b_n=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^{n-1}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{n-1}$となり，

$$b_n=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n-1}+\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n-1}$$

すると，①より，$c_n=b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n+\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n$

また，(1)より，$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^{n-1}+(1+\sqrt{2})^{n-1}}{(1-\sqrt{2})^n+(1+\sqrt{2})^n}$

［解　説］

わかりやすい誘導のついた漸化式の問題です。

4

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$ ……①に対して，a についてまとめると，

$$(x^2+2x)a+(x^3+2x^2+2-y)=0 \text{ ………②}$$

②が任意の a に対して成り立つ条件は，

$$x^2+2x=0 \text{ ………③},\quad x^3+2x^2+2-y=0 \text{ ………④}$$

③より $x=0,\ -2$ となり，④から $x=0$ のとき $y=2$，$x=-2$ のとき $y=2$ である。

これより，曲線 C が通る 2 つの定点の座標は，$(-2,\ 2)$，$(0,\ 2)$ である。

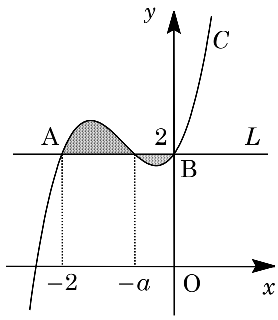
(2)　$\mathrm{A}(-2,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ となり，直線 L の方程式は $y=2$ ……⑤である。

そして，C と L の交点は，①⑤より，$x^3+(a+2)x^2+2ax+2=2$ となり，

$$x^3+(a+2)x^2+2ax=0,\quad x(x+a)(x+2)=0$$

これより，$x=0,\ -a,\ -2$ となり，すべての交点が線分 AB 上にある条件は，$-2<-a<0$ から，

$$0<a<2$$



(3)　C と L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_{-2}^{-a}\{x^3+(a+2)x^2+2ax+2-2\}dx$$

$$+\int_{-a}^{0}\{2-x^3-(a+2)x^2-2ax-2\}dx$$

$$=\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\Big]_{-2}^{-a}+\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\Big]_{0}^{-a}$$

$$=\frac{1}{4}(a^4-16)+\frac{a+2}{3}(-a^3+8)+a(a^2-4)+\frac{a^4}{4}+\frac{a+2}{3}\cdot(-a^3)+a^3$$

$$=\frac{1}{4}(2a^4-16)+\frac{a+2}{3}(-2a^3+8)+a(2a^2-4)$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

これより，$S'(a)=0$ の解は $a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$ であり，$0<a<2$ において $S(a)$ の増減を調べると，右表のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	$\frac{1}{2}$	↗	

よって，$S(a)$ は $a=1$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

定積分と面積についての問題です。やや計算は面倒ですが。