1　　解答解説のページへ

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2)　方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3)　不等式 $\sin 3x \geqq a \sin x$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

z は複素数で，$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が一直線上にあるための z についての必要十分条件を求めよ。

(2)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が $\angle \mathrm{C}$ を直角とする直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(3)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 $a,\ b,\ c$ が条件$(*)$: $a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で，(2)の条件$(*)$を満たすものをすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

正の整数 n に対して，関数 $f(x)=x^{2n}$ を考える。$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-t,\ f(-t))$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(t,\ f(t))$ を通る円の中心を $(p(t),\ q(t))$，半径を $r(t)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0} p(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0} q(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0} r(t)$ がすべて収束するとき $n=1$ であることを示せ。また，このとき $a=\displaystyle\lim_{t\to+0} p(t)$，$b=\displaystyle\lim_{t\to+0} q(t)$，$c=\displaystyle\lim_{t\to+0} r(t)$ の値を求めよ。

(2) $a,\ b,\ c$ を(1)で求めたものとする。このとき，中心 $(a,\ b)$，半径 c の円と放物線 $y=x^2$ および直線 $x=b$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$\sin 3x=-\sin x$ から $\sin 3x+\sin x=0$ となり，

$$3\sin x-4\sin^3 x+\sin x=0\,,\ \ 4\sin^3 x-4\sin x=0$$

これより，$4\sin x(\sin x+1)(\sin x-1)=0$ となり，$\sin x=0,\ \pm 1$ から，

$$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$\sin 3x=\sin x$ から $\sin 3x-\sin x=0$ となり，

$$3\sin x-4\sin^3 x-\sin x=0\,,\ \ 4\sin^3 x-2\sin x=0$$

これより，$2\sin x(\sqrt{2}\sin x+1)(\sqrt{2}\sin x-1)=0$ となり，$\sin x=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，

$$x=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi$$

(3)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$\sin 3x\geqq a\sin x$ から $\sin 3x-a\sin x\geqq 0$ ………①

ここで，$f(a)=\sin 3x-a\sin x$ とおくと，①が $-1\leqq a\leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つ条件は，$f(a)$ が a についての 1 次以下の関数より，

$$f(-1)\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ f(1)\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\sin 3x+\sin x\geqq 0$ となり，(1)から $4\sin x(\sin x+1)(\sin x-1)\leqq 0$

$$\sin x\leqq -1,\ \ 0\leqq \sin x\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より，$\sin 3x-\sin x\geqq 0$ となり，(2)から $2\sin x(\sqrt{2}\sin x+1)(\sqrt{2}\sin x-1)\leqq 0$

$$\sin x\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ 0\leqq \sin x\leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\sin x\leqq -1$，$0\leqq \sin x\leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，

$$0\leqq x\leqq \frac{\pi}{4}\,,\ \ \frac{3}{4}\pi\leqq x\leqq \pi\,,\ \ x=\frac{3}{2}\pi\,,\ \ x=2\pi$$

［解　説］

三角方程式と 3 次不等式の融合問題です。(3)はいろいろな方法が考えられますが，(1)(2)との対応を重視すると，解答例のようになるでしょう。

2　　問題のページへ

(1)　まず, $z\neq 0$, $z\neq \pm 1$ より, 3 点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(z)$, $\mathrm{C}(z^2)$ は異なる点である。

さて, 複素数平面上で, 3 点 A, B, C が一直線上にあるための条件は, $\dfrac{z^2-1}{z-1}=z+1$ が実数, すなわち z が $z\neq 0$, $z\neq\pm 1$ を満たす実数である。

(2)　複素数平面上で, 3 点 A, B, C が $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形の 3 頂点になる条件は, $\dfrac{1-z^2}{z-z^2}=\dfrac{1+z}{z}$ が純虚数である。

ここで, $z=x+yi$, k を実数とすると, $\dfrac{1+z}{z}=ki\ (k\neq 0)$ から,

$$1+x+yi=ki(x+yi),\quad 1+x+ky+(y-kx)i=0$$

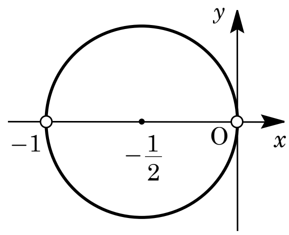
これより, $1+x+ky=0$ ………①, $y-kx=0$ ………②

②より $k=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$ となり, ①に代入すると $1+x+\dfrac{y^2}{x}=0$ から,

$$x^2+y^2+x=0,\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

なお, $x=0$ のときは $y=0$ となり①を満たさない。

したがって, $z\neq 0$, $z\neq\pm 1$ に注意し, z 全体の表す図形を複素数平面上に図示すると, 右図の円（太線）になる。ただし, 白丸の点は含まない。



(3)　複素数平面上で, 3 点 A, B, C が直角三角形の 3 頂点になる条件は,

(i)　$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ のとき

$\dfrac{z^2-1}{z-1}=z+1$ が純虚数より, $z+1=ki$ から $z=-1+ki\ (k\neq 0)$

(ii)　$\angle\mathrm{B}=90^\circ$ のとき

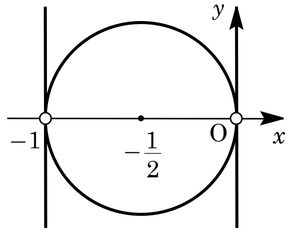
$\dfrac{z^2-z}{1-z}=-z$ が純虚数より, $-z=ki$ から $z=-ki\ (k\neq 0)$

(iii)　$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ のとき

(2)より, z は中心 $-\dfrac{1}{2}$ で半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点である。

(i)～(iii)より, z 全体の表す図形は右図の太線部である。

ただし, 白丸の点は含まない。



［解 説］

複素数と図形についての基本的な問題です。なお, (2)については共役複素数を利用する方法でも構いません。記述量はほとんど変わりませんが。

3

問題のページへ

(1)　整数nに対して，$n^3-n=(n-1)n(n+1)$………①

ここで，連続 3 整数$n-1$，n，$n+1$は，いずれかが 2 の倍数，いずれかが 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素なので，その積$(n-1)n(n+1)$は 6 の倍数である。

よって，①から，n を 6 で割ったときの余りと，n^3 を 6 で割ったときの余りは等しくなる。

(2)　整数a, b, cに対して，以下$\bmod 6$で記すと，(1)から$a\equiv a^3$かつ$b\equiv b^3$より，

$$a+b\equiv a^3+b^3\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，条件(＊)から，$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$なので，

$$a^3+b^3=(c+1)^3-c^3=3c^2+3c+1=3c(c+1)+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$c(c+1)$は 2 の倍数より，$3c(c+1)$は 6 の倍数となり，

$$a^3+b^3\equiv 3c(c+1)+1\equiv 1\ \cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$a+b\equiv 1$すなわち$a+b$を 6 で割った余りは 1 である。

(3)　$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$を満たす整数$a, b, c$に対して，③より，

$$b^3<a^3+b^3=3c(c+1)+1\leqq 3\times 10\times 11+1=331$$

ここで，$6^3=216$，$7^3=343$より，$b\leqq 6$となる。

これより，$2\leqq a+b\leqq 12$となり，(1)の結論から$a+b=6\cdot 1+1=7$

$$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$$

(i)　$(a,\ b)=(1,\ 6)$のとき　$a^3+b^3=217$となり，③より$3c^2+3c+1=217$

$c^2+c-72=0$となり，$(c-8)(c+9)=0$から$c=8$

(ii)　$(a,\ b)=(2,\ 5)$のとき　$a^3+b^3=133$となり，③より$3c^2+3c+1=133$

$c^2+c-44=0$となり，この方程式を満たす整数cは存在しない。

(iii)　$(a,\ b)=(3,\ 4)$のとき　$a^3+b^3=91$となり，③より$3c^2+3c+1=91$

$c^2+c-30=0$となり，$(c-5)(c+6)=0$から$c=5$

(i)～(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 6,\ 8),\ (3,\ 4,\ 5)$

［解 説］

標準的な整数問題です。ポイントは，(3)の値を絞り込む作業です。また，(1)は 6 で割った余りで場合分けをして処理する方法も考えられます。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^{2n}$ (nは正の整数)のとき，$t>0$に対して$f(-t)=f(t)=t^{2n}$

ここで，3 点$\mathrm{A}(-t,\ t^{2n})$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(t,\ t^{2n})$を通る円の中心を$\mathrm{C}(p(t),\ q(t))$，半径を$r(t)$とおくと，まず$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$から，

$$\{p(t)+t\}^2+\{q(t)-t^{2n}\}^2=\{p(t)-t\}^2+\{q(t)-t^{2n}\}^2,\ p(t)=0\cdots\cdots\cdots①$$

すると，①から$\mathrm{C}(0,\ q(t))$となり，次に$\mathrm{OC}=\mathrm{BC}$から，

$$\{q(t)\}^2=t^2+\{q(t)-t^{2n}\}^2,\ t^{4n}-2t^{2n}q(t)+t^2=0$$

これより，$q(t)=\dfrac{t^{4n}+t^2}{2t^{2n}}=\dfrac{1}{2}\Big(t^{2n}+\dfrac{1}{t^{2n-2}}\Big)\cdots\cdots\cdots②$

②より$q(t)>0$なので，$r(t)=\mathrm{OC}=|q(t)|=q(t)=\dfrac{1}{2}\Big(t^{2n}+\dfrac{1}{t^{2n-2}}\Big)\cdots\cdots\cdots③$

さて，①より$\displaystyle\lim_{t\to+0}p(t)=0$，②③より$\displaystyle\lim_{t\to+0}q(t)=\lim_{t\to+0}r(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to+0}\Big(t^{2n}+\frac{1}{t^{2n-2}}\Big)$

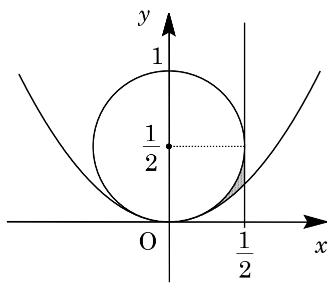
ここで，$n\geqq 2$のとき$2n-2\geqq 2$なので，$\displaystyle\frac{1}{2}\lim_{t\to+0}\Big(t^{2n}+\frac{1}{t^{2n-2}}\Big)=\infty$となり，また$n=1$のとき，$\displaystyle\frac{1}{2}\lim_{t\to+0}\Big(t^{2n}+\frac{1}{t^{2n-2}}\Big)=\frac{1}{2}\lim_{t\to+0}(t^{2n}+1)=\frac{1}{2}$である。

よって，$\displaystyle\lim_{t\to+0}p(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0}q(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0}r(t)$がすべて収束するとき$n=1$であり，

$$a=\lim_{t\to+0}p(t)=0,\ b=\lim_{t\to+0}q(t)=\frac{1}{2},\ c=\lim_{t\to+0}r(t)=\frac{1}{2}$$

(2)　中心$\Big(0,\ \dfrac{1}{2}\Big)$で半径$\dfrac{1}{2}$の円の方程式は，

$$x^2+\Big(y-\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\ \cdots\cdots\cdots④$$



円④と放物線$y=x^2$と直線$x=\dfrac{1}{2}$で囲まれた図形をx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vは，

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\Big)^2dx-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^4dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-x^2-x^4-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\Big)dx$$

$$=\pi\Big[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$$

$$=\pi\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{160}\Big)-\pi\Big\{\frac{1}{4}\cdot\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big\}=\frac{97}{480}\pi-\frac{1}{16}\pi^2$$

［解　説］

回転体の体積を題材にした標準的な問題です。(1)の意味を考えると，(2)の円と放物線は接していることがわかります。