1

解答解説のページへ

2 つのチーム S と T が野球の試合を繰り返し行い，先に 4 勝したチームを優勝とする。第 1, 2, 6, 7 戦は S のホームゲームであり，第 3, 4, 5 戦は T のホームゲームである。S のホームゲームで S が勝つ確率は $\dfrac{3}{5}$ であり，T のホームゲームで T が勝つ確率は $\dfrac{5}{6}$ とする。各試合で引き分けはないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　どちらかの優勝が決まるまでに S が 1 勝以上する確率を求めよ。

(2)　T のホームゲームで T が優勝する確率を求めよ。

(3)　第 1, 2 戦とも S が勝ち，かつ S が優勝する確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上の x 座標と y 座標がともに正の整数である点$(x,\ y)$全体の集合を D とする。D に属する点$(x,\ y)$に対して$x+y$が小さいものから順に，また$x+y$が等しい点の中では x が小さい順に番号をつけ，n 番目$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$の点をP_nとする。例えば，P_1，P_2，P_3の座標は順に$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　座標が$(2,\ 4)$である点は何番目か。また，P_{10}の座標を求めよ。

(2)　座標が$(n,\ n)$である点の番号をa_nとする。数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　(2)で定めた数列$\{a_n\}$に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 $a,\ b,\ c$ が条件$(*)$: $a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で，(2)の条件$(*)$を満たすものをすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通るとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標が $x>0$ の範囲にあるとき，頂点の y 座標の最小値を求めよ。

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が $0\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるとき，この放物線と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　まず，対戦回と S, T が勝つ確率を表にまとめると，右表のようになる。

対戦回	S	T
1, 2, 6, 7	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
3, 4, 5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

さて，T が 4 連勝（T→T→T→T）して優勝する確率は，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{9}$$

これより，どちらかの優勝が決まるまでに S が 1 勝以上する確率は，

$$1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

(2)　T のホームゲームで T が優勝するのは，

(i)　T が 4 連勝のとき　このとき確率は，(1)から$\frac{1}{9}$

(ii)　T が 3 勝 1 敗の後，第 5 戦で勝つとき

・S→T→T→T→T のとき　このときの確率は，$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{36}$

・T→S→T→T→T のとき　このときの確率は，$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{36}$

・T→T→S→T→T のとき　このときの確率は，$\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{54}$

・T→T→T→S→T のとき　このときの確率は，$\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{54}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{54}+\frac{1}{54}=\frac{23}{54}$となる。

(3)　第 1, 2 戦とも S が勝ち，かつ S が優勝するのは，

(i)　S が 4 連勝（S→S→S→S）のとき　このときの確率は，$\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{2^2\times5^2}$

(ii)　S が 3 勝 1 敗の後，第 5 戦で勝つとき

S→S→T→S→S または S→S→S→T→S のときで，このときの確率は，

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\times2=\frac{1}{2^2\times3\times5}$$

(iii) S が 3 勝 2 敗の後，第 6 戦で勝つとき

S→S→T→T→S→S または S→S→T→S→T→S または S→S→S→T→T→S のときで，このときの確率は，

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\times3=\frac{3}{2^3\times5}$$

(iv) S が 3 勝 3 敗の後，第 7 戦で勝つとき

S→S→T→T→T→S→S または S→S→T→T→S→T→S または S→S→T→S→T→T→S または S→S→S→T→T→T→S のときで，このときの確率は，

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\times3=\frac{3}{2^3\times5}+\frac{3}{2^2\times5^2}=\frac{21}{2^3\times5^2}$$

© 電送数学舎 2021

(i)～(iv)より，求める確率は,

$$\frac{1}{2^2\times5^2}+\frac{1}{2^2\times3\times5}+\frac{3}{2^3\times5}+\frac{21}{2^3\times5^2}=\frac{124}{2^3\times3\times5^2}=\frac{31}{150}$$

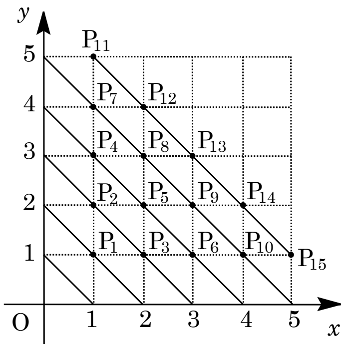
［解 説］

確率の計算問題です。最も要求されるのは注意力です。(3)は余事象に着目しても構いません。

© 電送数学舎 2021

2

問題のページへ



(1)　第 1 象限にある格子点$(x,\ y)$に対して，題意の点列$\{\mathrm{P}_n\}$を定めると，右図のようになる。

　すると，点$(2,\ 4)$はP_{12}より 12 番目となり，またP_{10}の座標は$(4,\ 1)$である。

(2)　線分$x+y=k+1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$上にある点列$\{\mathrm{P}_n\}$を第k群とすると，

$$\mathrm{P}_1 \mid \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3 \mid \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_6 \mid \mathrm{P}_7,\ \cdots\cdots$$

　第k群はk項あるので，この末項までの項数は,

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

　さて，点$(n,\ n)$をP_{a_n}とおくと，$n+n-1=2n-1$から第$2n-1$群に属し，この群内の初項から数えてn番目なので,

$$a_n=\frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)+n=2n^2-2n+1$$

(3)
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{3}n\{(2n^2+3n+1)-3(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

［解　説］

頻出タイプの群数列の問題です。(1)は一般的に処理もできますが，ここでは図からということにしました。

© 電送数学舎 2021

3

問題のページへ

(1)　整数 n に対して，$n^3-n=(n-1)n(n+1)$ ………①

ここで，連続 3 整数 $n-1$，n，$n+1$ は，いずれかが 2 の倍数，いずれかが 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素なので，その積 $(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数である。

よって，①から，n を 6 で割ったときの余りと，n^3 を 6 で割ったときの余りは等しくなる。

(2)　整数 a, b, c に対して，以下 mod 6 で記すと，(1)から $a\equiv a^3$ かつ $b\equiv b^3$ より，

$$a+b\equiv a^3+b^3 \text{ ………②}$$

さて，条件(＊)から，$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ なので，

$$a^3+b^3=(c+1)^3-c^3=3c^2+3c+1=3c(c+1)+1 \text{ ………③}$$

ここで，$c(c+1)$ は 2 の倍数より，$3c(c+1)$ は 6 の倍数となり，

$$a^3+b^3\equiv 3c(c+1)+1\equiv 1 \text{ ………④}$$

②④より，$a+b\equiv 1$ すなわち $a+b$ を 6 で割った余りは 1 である。

(3)　$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数 a, b, c に対して，③より，

$$b^3<a^3+b^3=3c(c+1)+1\leqq 3\times 10\times 11+1=331$$

ここで，$6^3=216$，$7^3=343$ より，$b\leqq 6$ となる。

これより，$2\leqq a+b\leqq 12$ となり，(1)の結論から $a+b=6\cdot 1+1=7$

$$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$$

(i)　$(a,\ b)=(1,\ 6)$ のとき　$a^3+b^3=217$ となり，③より $3c^2+3c+1=217$

$c^2+c-72=0$ となり，$(c-8)(c+9)=0$ から $c=8$

(ii)　$(a,\ b)=(2,\ 5)$ のとき　$a^3+b^3=133$ となり，③より $3c^2+3c+1=133$

$c^2+c-44=0$ となり，この方程式を満たす整数 c は存在しない。

(iii)　$(a,\ b)=(3,\ 4)$ のとき　$a^3+b^3=91$ となり，③より $3c^2+3c+1=91$

$c^2+c-30=0$ となり，$(c-5)(c+6)=0$ から $c=5$

(i)～(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 6,\ 8),\ (3,\ 4,\ 5)$

［解　説］

標準的な整数問題です。ポイントは，(3)の値を絞り込む作業です。また，(1)は 6 で割った余りで場合分けをして処理する方法も考えられます。

© 電送数学舎 2021

4　　問題のページへ

(1)　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通ることから，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ となり，

$$a+b+c=1\cdots\cdots\cdots①,\ \ a-b+c=-1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=1$，$a+c=0$ となり，$f(x)=ax^2+x-a=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a}$

これより，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を $(p,\ q)$ とおくと，

$$(p,\ q)=\left(-\frac{1}{2a},\ -a-\frac{1}{4a}\right)$$

すると，$p=-\frac{1}{2a}>0$ から $a<0$ となり，相加平均と相乗平均の関係より，

$$q=-a-\frac{1}{4a}=(-a)+\left(-\frac{1}{4a}\right)\geqq 2\sqrt{(-a)\cdot\left(-\frac{1}{4a}\right)}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

等号は $-a=-\frac{1}{4a}$ すなわち $a^2=\frac{1}{4}$ から $a=-\frac{1}{2}$ のときに成り立つ。

よって，頂点の y 座標の最小値は 1 である。

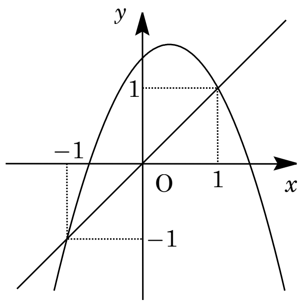
(2)　条件から $0\leqq q\leqq 2$ なので，$0\leqq -a-\frac{1}{4a}\leqq 2$ となり，$a<0$ である。

すると，$0\geqq -4a^2-1\geqq 8a$ となり，$0\geqq -4a^2-1$ は成り立つので，

$$-4a^2-1\geqq 8a\ ,\ \ 4a^2+8a+1\leqq 0,\ \ \frac{-2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

なお，③は $a<0$ を満たしている。

さて，放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S とすると，



$$S=\int_{-1}^{1}(ax^2+x-a-x)dx=\int_{-1}^{1}a(x^2-1)dx$$

$$=a\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx=-\frac{a}{6}\{1-(-1)\}^3$$

$$=-\frac{4}{3}a$$

③より $-\frac{4}{3}\cdot\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\geqq -\frac{4}{3}a\geqq -\frac{4}{3}\cdot\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$ となり，$\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\leqq S\leqq\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

よって，S の最大値は $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$，最小値は $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$ である。

［解　説］

2 次関数のグラフを題材とした基本題です。

© 電送数学舎 2021