1

解答解説のページへ

x と y をそれぞれ自然数とする。袋 A には白玉 2 個，赤玉 3 個，袋 B には白玉 x 個，赤玉 y 個が入っている。袋 A から 1 個の玉を取り出して袋 B に入れ，よくかき混ぜて袋 B から 1 個の玉を取り出して袋 A に入れる。このとき袋 A の白玉の個数がはじめと変わらない確率を p とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=10$，$y=23$ のとき p を求めよ。

(2)　(1)で求めた p を与える x, y の組で $1\leqq x\leqq 1000$，$1\leqq y\leqq 1000$ となるものが何組あるかを求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

0 でない複素数 α は $|\alpha - i| = 1$ を満たすとする。また α の偏角 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $|\alpha|$ を θ を用いて表せ。

(2) $\beta = -\alpha + 2i$ とおく。β の偏角 $\arg\beta$ を θ を用いて表せ。ただし $0 \leqq \arg\beta < 2\pi$ とする。

(3) β は(2)で与えられたものとする。複素数平面において実軸上に点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が一直線上にあるとき θ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

xyz 空間における O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)，D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1) を頂点とする立方体を考える。点 P は時刻 $t=0$ に原点 O を出発し毎秒 1 の速さで正方形 OABC の周上を点 O, 点 A, 点 B, 点 C の順に一周する。点 Q は時刻 $t=0$ に点 D を出発し毎秒 1 の速さで正方形 DEFG の周上を点 D, 点 G, 点 F, 点 E の順に一周する。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 OABC, 正方形 DEFG によって囲まれる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) a は $0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ を満たすとする。平面 $z=a$ によって立体 K を切ったときの切り口の面積を求めよ。

(2) 立体 K の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

a を正の数とする。xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとり，C_1 を双曲線 $x^2-4y^2=-4$ とし，C_2 を双曲線 $x^2-4y^2=4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が C_1 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。

(2) 点 P が C_2 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。

(3) 点 P が C_1 または C_2 上にあるとする。このとき点 $(2,\ 0)$ が, AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 白玉 2 個, 赤玉 3 個が入った袋 A と, 白玉 10 個, 赤玉 23 個が入った袋 B があり, 袋 A から 1 個の玉を袋 B へ, よくかき混ぜて袋 B から 1 個の玉を袋 A に戻す。この試行の後, 袋 A の白玉が 2 個であるのは,

(i) A から B が白玉, B から A が白玉のとき　この確率は, $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{10+1}{33+1}=\dfrac{11}{5\times17}$

(ii) A から B が赤玉, B から A が赤玉のとき　この確率は, $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{23+1}{33+1}=\dfrac{36}{5\times17}$

(i)(ii)より, 求める確率 p は, $p=\dfrac{11}{5\times17}+\dfrac{36}{5\times17}=\dfrac{47}{85}$ である。

(2) 袋 B が白玉 x 個, 赤玉 y 個の場合, (1)と同様に考えると,

$$p=\frac{2}{5}\times\frac{x+1}{x+y+1}+\frac{3}{5}\times\frac{y+1}{x+y+1}=\frac{2x+3y+5}{5(x+y+1)}$$

条件より $p=\dfrac{47}{85}$ なので, $\dfrac{2x+3y+5}{5(x+y+1)}=\dfrac{47}{85}$ から $\dfrac{2x+3y+5}{x+y+1}=\dfrac{47}{17}$ となり,

$$17(2x+3y+5)=47(x+y+1),\ 13x-4y=38\ \cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす 1 つの解が $(x,\ y)=(10,\ 23)$ より, $13\times10-4\times23=38$ となり,

$$13(x-10)-4(y-23)=0,\ 13(x-10)=4(y-23)$$

13 と 4 は互いに素なので, k を整数として, $x-10=4k$, $y-23=13k$

$$x=4k+10,\ y=13k+23\cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $1\leqq x\leqq1000$, $1\leqq y\leqq1000$ から, ②より,

$$1\leqq 4k+10\leqq1000,\ 1\leqq13k+23\leqq1000$$

よって, $-\dfrac{9}{4}\leqq k\leqq\dfrac{990}{4}$, $-\dfrac{22}{13}\leqq k\leqq\dfrac{977}{13}$ より, 整数 k の範囲は $-1\leqq k\leqq75$ となるので, $p=\dfrac{47}{85}$ となる x, y の組は, $75-(-1)+1=77$ 個ある。

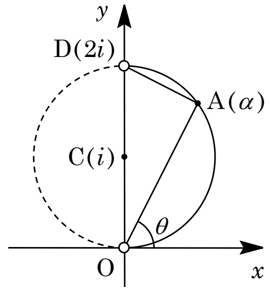
［解 説］

確率と不定方程式の融合問題です。題意から当然ですが, (1)の具体例は①の特殊解になっています。

2

問題のページへ

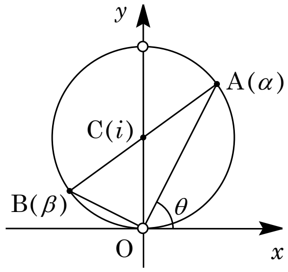
(1)　$|\alpha - i| = 1$ $(\alpha \neq 0)$ で，$\arg\alpha = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ は中心が $\mathrm{C}(i)$，半径が 1 の半円上の点となる。図示すると，右図の実線部にある。



ここで，$\mathrm{D}(2i)$ とおくと，$\angle\mathrm{OAD} = \dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$|\alpha| = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sin\theta$$

(2)　$\beta = -\alpha + 2i$ より，$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = i$ となるので，$\mathrm{B}(\beta)$ とおくと，線分 AB の中点が $\mathrm{C}(i)$ である。



すると，線分 AB は円の直径となり，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$ から，

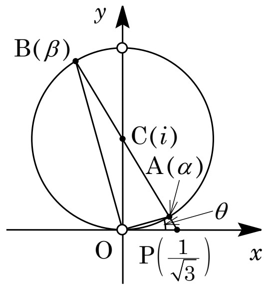
$$\arg\beta = \arg\alpha + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2}$$

(3)　3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が一直線上にあるとき，

$$\tan\angle\mathrm{OCP} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \angle\mathrm{OCP} = \frac{\pi}{6}$$

ここで，実軸が円の接線になっていることに注目し，接弦定理を利用すると，

$$\theta = \angle\mathrm{OBA} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{OCA} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$



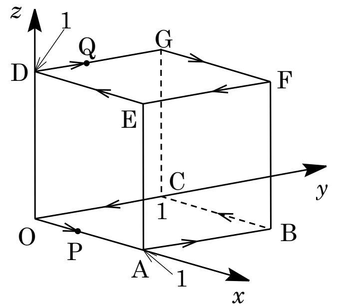
［解 説］

複素数平面上の図形についての基本的な問題です。誘導が丁寧なので，スムーズに流れていきます。

3

問題のページへ

(1) 右図の立方体の辺上を，$t=0$ に原点 O を出発した点 P が毎秒 1 の速さで正方形 OABC を矢印の向きに一周する。また，$t=0$ に点 D を出発した点 Q が毎秒 1 の速さで正方形 DEFG を矢印の向きに一周する。



線分 PQ が通過してできる図形と正方形 OABC，正方形 DEFG によって囲まれる立体を K とする。

(i) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

辺 OA 上の点 P，辺 DG 上の点 Q は，$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ t,\ 1)$ と表され，線分 PQ を $a:1-a\left(0\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z)=\big((1-a)t,\ at,\ a\big)$$

すると，点 R の軌跡は 2 点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1-a,\ a,\ a)$ を結ぶ線分である。

(ii) $1\leqq t\leqq 2$ のとき

辺 AB 上の点 P，辺 GF 上の点 Q は，$\mathrm{P}(1,\ t-1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t-1,\ 1,\ 1)$ と表され，線分 PQ を $a:1-a\left(0\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z)=\big((1-a)+a(t-1),\ (1-a)(t-1)+a,\ a\big)$$

すると，点 R の軌跡は 2 点 $(1-a,\ a,\ a)$，$(1,\ 1,\ a)$ を結ぶ線分である。

(iii) $2\leqq t\leqq 3$ のとき

辺 BC 上の点 P，辺 FE 上の点 Q は，$\mathrm{P}(3-t,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3-t,\ 1)$ と表され，線分 PQ を $a:1-a\left(0\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z)=\big((1-a)(3-t)+a,\ 1-a+a(3-t),\ a\big)$$

すると，点 R の軌跡は 2 点 $(1,\ 1,\ a)$，$(a,\ 1-a,\ a)$ を結ぶ線分である。

(iv) $3\leqq t\leqq 4$ のとき

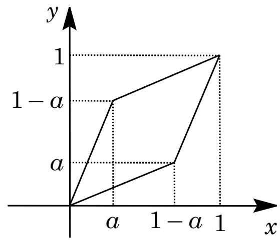
辺 CO 上の点 P，辺 ED 上の点 Q は，$\mathrm{P}(0,\ 4-t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(4-t,\ 0,\ 1)$ と表され，線分 PQ を $a:1-a\left(0\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z)=\big(a(4-t),\ (1-a)(4-t),\ a\big)$$

すると，点 R の軌跡は 2 点 $(a,\ 1-a,\ a)$，$(0,\ 0,\ a)$ を結ぶ線分である。

(i)〜(iv)より，$z=a$ 上の点 R の軌跡は右図のひし形である。

すると，平面 $z=a$ によって立体 K を切ったときの切り口は，右図のひし形の辺上および内部となり，その面積を $S(a)$ とすると，$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ から，



$$S(a)=\left|(1-a)^2-a^2\right|=\left|1-2a\right|=1-2a$$

(2)　立体 K の平面 $z=\dfrac{1}{2}$ についての対称性を利用すると，その体積 V は，

$$V=2\int_0^{\frac{1}{2}}S(a)\,da=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2a)\,da=2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{2}$$

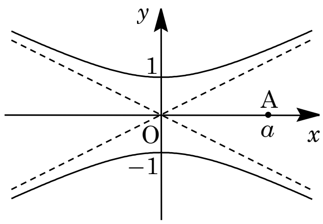
［解　説］

通過領域と体積についての有名問題です。(1)は丁寧に 4 通りに場合分けをしましたが，(iii)と(iv)の場合は「同様に」と記述してもよいでしょう。なお，点 R のパラメータ表示から，軌跡は直線とわかるため，線分の端点だけで処理をしています。

4

問題のページへ

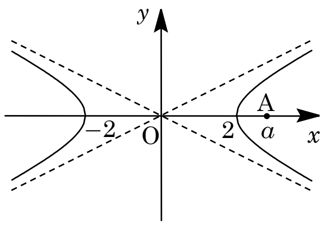
(1)　点 $\mathrm{A}(a,\ 0)\ (a>0)$ に対して，$C_1 : x^2-4y^2=-4$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \pm\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)$ とおくと，



$$\mathrm{AP}^2=(t-a)^2+\frac{t^2}{4}+1=\frac{5}{4}t^2-2at+a^2+1$$
$$=\frac{5}{4}\left(t-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2+1$$

これより，$t=\dfrac{4}{5}a$ のとき AP は最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}$ をとる。また，このとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5}a,\ \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2+1}\right)$ となる。

(2)　$C_2 : x^2-4y^2=4$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \pm\sqrt{\dfrac{t^2}{4}-1}\right)$ とおくと，



$$\mathrm{AP}^2=(t-a)^2+\frac{t^2}{4}-1=\frac{5}{4}t^2-2at+a^2-1$$
$$=\frac{5}{4}\left(t-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2-1$$

ここで，$a>0$ から $t\geqq 2$ で最小値を調べると，

(i)　$\dfrac{4}{5}a\geqq 2\ \left(a\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$t=\dfrac{4}{5}a$ のとき AP^2 は最小となり，AP は最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2-1}$ をとる。そして，このとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5}a,\ \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2-1}\right)$ である。

(ii)　$\dfrac{4}{5}a<2\ \left(0<a<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

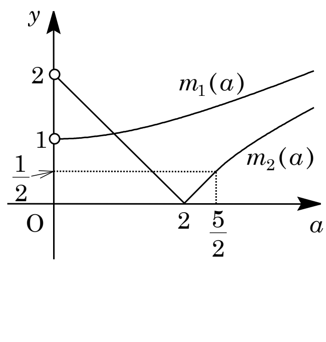
$t=2$ のとき AP^2 は最小となり，AP は最小値 $\sqrt{(2-a)^2}=|2-a|$ をとる。そして，このとき $\mathrm{P}(2,\ 0)$ である。

(3)　点 A と C_1 上の点の距離の最小値を $m_1(a)$ とおくと，(1)より，$m_1(a)=\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}$

また，点 A と C_2 上の点の距離の最小値を $m_2(a)$ とおくと，(2)より，

$$m_2(a)=\sqrt{\frac{1}{5}a^2-1}\ \left(a\geqq\frac{5}{2}\right),\ \ m_2(a)=|2-a|\ \left(0<a<\frac{5}{2}\right)$$

ここで，$y=m_1(a)$，$y=m_2(a)$ のグラフを描くと右図のようになる。さて，$0<a<2$ において，$y=m_1(a)$，$y=m_2(a)$ を連立すると，



$$\sqrt{\frac{1}{5}a^2+1}=|2-a|,\ \ \frac{1}{5}a^2+1=4-4a+a^2$$

すると，$4a^2-20a+15=0$ となり，$0<a<2$ から，

$$a=\frac{5-\sqrt{10}}{2}$$

そこで，点 P が C_1 または C_2 上にあるとき，AP の最小値を m とすると，

$$m = m_1(a)\left(0 < a < \frac{5-\sqrt{10}}{2}\right),\ \ m = m_2(a)\left(a \geqq \frac{5-\sqrt{10}}{2}\right)$$

これより，点 $(2,\ 0)$ が，AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲は，

$$\frac{5-\sqrt{10}}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$

［解 説］

双曲線を題材にした問題です。(3)では「m は $m_1(a)$ と $m_2(a)$ の大きくない方」ということに着目して考えました。ただ，やや複雑な関数が現れたので，グラフを書いて整理しています。