1

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$に対して，$\det A = t(2-t)-(t-1)(1-t)=1\neq 0$

よって，逆行列A^{-1}が存在する。

(2)　(1)より，$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix}$となり，$A+A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A-A^{-1}=\begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 \\ 2-2t & 2-2t \end{pmatrix}=2(t-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-A^{-1})^2=4(t-1)^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)　$B=A+A^{-1}$，$C=A-A^{-1}$とおくと，$A=\dfrac{1}{2}(B+C)$

また，単位行列をE，零行列をOとすると，(1)より，$B=2E$，$C^2=O$となり，

$$BC=(A+A^{-1})(A-A^{-1})=A^2-AA^{-1}+A^{-1}A-(A^{-1})^2=A^2-(A^{-1})^2$$

$$CB=(A-A^{-1})(A+A^{-1})=A^2+AA^{-1}-A^{-1}A-(A^{-1})^2=A^2-(A^{-1})^2$$

すると，$BC=CB$となり，二項定理を利用すると，$n\geqq 2$で，

$$A^n=\frac{1}{2^n}(B^n+nB^{n-1}C)=\frac{1}{2^n}(2^nE+n\cdot 2^{n-1}C)=E+\frac{n}{2}C$$

なお，この式は，$n=1$のときも成り立ち，

$$A^{2n}-tA^n=(E+nC)-t\left(E+\frac{n}{2}C\right)=(1-t)E+\frac{n}{2}(2-t)C\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$がnによらない行列になる条件は，$2-t=0$または$C=O$である。

すなわち，$t=2,\ 1$である。

[解 説]

行列の n 乗に関する頻出タイプの問題です。$C^2=O$から，(3)の方針を決めました。

2

問題のページへ

(1) $3n$ 枚のカードから 3 枚を取り出す ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで，3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である取り出し方は ${}_{n}\mathrm{C}_3$ 通りより，その確率は,

$$\frac{{}_{n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

(2) まず, $3n$ 枚のカードを，書かれた数字によって，次の 3 つのタイプに分類する。

すなわち，書かれた数字が 3 の倍数の n 枚のカード，(3 の倍数＋1)の n 枚のカード，(3 の倍数＋2)の n 枚のカードである。

すると，3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数であるのは，同じタイプから 3 枚を取り出す ${}_{n}\mathrm{C}_3\times 3$ 通り，3 つのタイプから 1 枚ずつ取り出す $({}_{n}\mathrm{C}_1)^3=n^3$ 通りの場合がある。これより，その確率は,

$$\frac{3\,{}_{n}\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率 p_1 は，余事象を考えて,

$$p_1=1-\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

また, 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率 p_2 は, (2)より,

$$p_2=1-\frac{3\,{}_{n}\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

これより，$p_1-p_2=-\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}+\dfrac{3\,{}_{n}\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$ となり,

$$\begin{aligned}(p_1-p_2)\,{}_{3n}\mathrm{C}_3&=-\frac{2n}{6}(2n-1)(2n-2)+\frac{3}{6}n(n-1)(n-2)+n^3\\&=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)>0\end{aligned}$$

よって，$p_1>p_2$ から，積が 3 の倍数である確率の方が大きい。

[解 説]

確率の基本問題です。なお, (2)の分類方法は必須事項です。

3

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$y = x^2(1-x)^n \geqq 0$ より，この曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積 S_n は，$1-x=t$ とおいて，

$$S_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^2 t^n(-dt) = \int_0^1 (1-2t+t^2)t^n dt$$
$$= \int_0^1 (t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2})dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{2t^{n+2}}{n+2} + \frac{t^{n+3}}{n+3}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

(2)　(1)から，$S_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$ となり，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

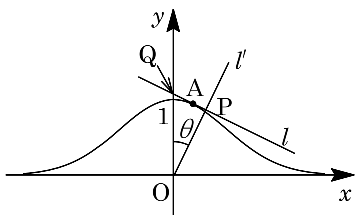
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{6}$

[解　説]

積分と極限の融合の形式ですが，内容や計算は平易です。

4

問題のページへ



(1)　$f(x)=e^{-x^2}$ より，$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

さて，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 l は，

$$y-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(x-a)$$

$$2ae^{-a^2}x+y-(2a^2+1)e^{-a^2}=0$$

線分 OP の長さは，原点 O と直線 l の距離より，

$$\mathrm{OP}=\frac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2}+1}}=\frac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(2)　直線 l の法線ベクトルの成分が，$(2ae^{-a^2},\ 1)=e^{-a^2}(2a,\ e^{a^2})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{u}=(2a,\ e^{a^2})$ とし，また $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{v}=(0,\ 1)$ とすると，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ は，

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{e^{a^2}}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

よって，$\sin^2\theta=1-\dfrac{e^{2a^2}}{4a^2+e^{2a^2}}=\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ となり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\sin\theta=\frac{2|a|}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(3)　$t=2a^2\geqq0$ とおき，$g(t)=\dfrac{2t}{2t+e^t}$ とすると，(2)より，$\sin\theta=\sqrt{g(t)}$ となる。

$$g'(t)=\frac{2(2t+e^t)-2t(2+e^t)}{(2t+e^t)^2}=\frac{2(1-t)e^t}{(2t+e^t)^2}$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{2+e}$	$\searrow$

右表より，$g(t)$ は，$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{2}{2+e}$ をとる。

よって，$\sin\theta$ が最大となるのは，$2a^2=1$ から $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり，$\sin\theta$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{2}{2+e}}$ である。

[解　説]

計算がやや難の部分もありますが，微分についての標準的な問題です。