$\boxed{1}$

問題のページへ

$\boxed{S_1}$ $\boxed{S_2}$ $\boxed{S_3}$ $\boxed{S_4}$ $\boxed{S_5}$ $\boxed{S_6}$ $\boxed{S_7}$ $\boxed{S_8}$

(1)　男性が S_1，S_3，S_5，S_7 に座る場合，S_2，S_4，S_6，S_8 に座る場合があるので，同性どうしが隣り合わない座り方は，

$$2\times 4!\times 4! = 1152 \text{（通り）}$$

(2)　まず，M_1 の座席は S_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7 のいずれかであり，また F_1 と F_2 については $F_1\ M_1\ F_2$ の場合と $F_2\ M_1\ F_1$ の 2 つの場合がある。さらに，残りの男性 3 人，女性 2 人の座り方を合わせて考えると，M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は，

$$6\times 2\times 3!\times 2! = 144 \text{（通り）}$$

(3)　まず，M_1 と F_1 が隣り合う座り方を考える。

(i)　M_1 が S_1 または S_8 に座るとき

F_1 の座席は 1 通りに決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$2\times 1\times 3!\times 3! = 72 \text{（通り）}$$

(ii)　M_1 が S_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7 のいずれかに座るとき

F_1 の座席は 2 通りずつ決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$6\times 2\times 3!\times 3! = 432 \text{（通り）}$$

(i)(ii)より，M_1 と F_1 が隣り合う座り方は，$72+432=504$ 通りとなる。

よって，M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は，(1)の結論を用いると，

$$1152-504=648 \text{（通り）}$$

[解　説]

順列の基本問題です。(3)では，図を描いて，直接的に数えても大差はありません。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ より，$a_3=4$，$a_4=7$ となるので，条件から，

$$X\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

よって，$X=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ………①

逆に，①のとき，$a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}$ も合わせて，すべての自然数 n に対して，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}\ \text{………②}$$

よって，$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(2)　$d_n=a_na_{n+2}-(a_{n+1})^2$ とおいて，②の両辺の行列式をとると，

$$(-1)d_n=d_{n+1},\ d_{n+1}=-d_n\ \text{………③}$$

さて，$d_1=a_1a_3-(a_2)^2=-5$，$d_2=a_2a_4-(a_3)^2=5$ より，$d_n=5(-1)^n$ と推測できる。以下，この式を数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$d_1=-5$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$d_k=5(-1)^k$ であると仮定する。

③より，$d_{k+1}=-d_k=-5(-1)^k=5(-1)^{k+1}$

これより，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$d_n=a_na_{n+2}-(a_{n+1})^2=5(-1)^n$ である。

[解 説]

漸化式と行列の融合問題です。(2)は，問題文の指示に従いました。

3

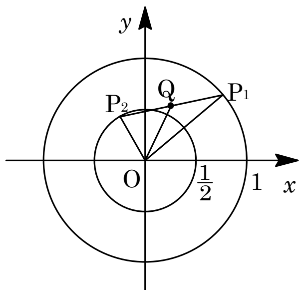
問題のページへ

(1) 2 点 $P_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$P_2\left(\frac{1}{2}\cos 3\theta,\ \frac{1}{2}\sin 3\theta\right)$に対して，

線分 P_1P_2 の中点を $Q(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 3\theta\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$y=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta\ \cdots\cdots\cdots②$$



すると, 3 倍角の公式を用いて，①より，

$$x=\frac{1}{2}\cos\theta+\cos^3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta=\cos^3\theta-\frac{1}{4}\cos\theta$$

ここで，$t=\cos\theta$ とおくと，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ から $0<t\leqq 1$ であり，$x=t^3-\frac{1}{4}t\ \cdots\cdots\cdots③$

$$\frac{dx}{dt}=3t^2-\frac{1}{4}=3\left(t+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

すると，x の値の増減は右表のようになり，点 Q の x 座標のとりうる範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{36}\leqq x\leqq\frac{3}{4}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{36}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

(2) $0<t\leqq 1$ において，$x=0$ となるのは，③より $t=\frac{1}{2}$ のときであり，

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=\frac{\pi}{3}\ \left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

すると，$\alpha=\frac{\pi}{3}$ となり，$r(\theta)=\mathrm{OQ}$ なので，①②から，

$$\{r(\theta)\}^2=\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 3\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(\cos\theta\cos 3\theta+\sin\theta\sin 3\theta)=\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\cos 2\theta$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\alpha}\{r(\theta)\}^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)d\theta=\frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{8}\Big[\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

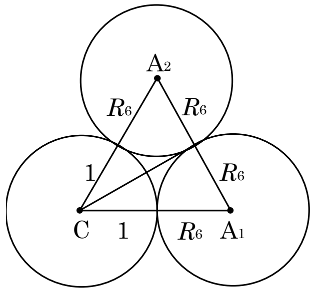
$$=\frac{5}{48}\pi+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{48}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

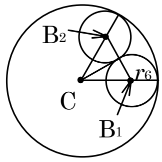
[解　説]

微積分の融合問題です。計算量は少なめです。

4

問題のページへ





(1)　右図において，$\angle A_1CA_2=\dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$CA_1=CA_2=1+R_6,\quad A_1A_2=2R_6$$

よって，$R_6=(1+R_6)\sin\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$2R_6=1+R_6,\quad R_6=1$$

また，$\angle B_1CB_2=\dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$CB_1=CB_2=1-r_6,\quad B_1B_2=2r_6$$

よって，$r_6=(1-r_6)\sin\dfrac{\pi}{6}$ となり，$2r_6=1-r_6$，$r_6=\dfrac{1}{3}$

(2)　(1)と同様に考えると，

$$R_n=(1+R_n)\sin\frac{\pi}{n},\quad R_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$r_n=(1-r_n)\sin\frac{\pi}{n},\quad r_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$$

よって，$R_n-r_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}-\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}\cdot 2\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}=\dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと, $n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}n^2(R_n-r_n)=\lim_{\theta\to 0}\frac{\pi^2}{\theta^2}\cdot\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\pi^2}{\cos^2\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=2\pi^2$$

[解 説]

よく見かける 2 円の内接・外接を題材にした問題です。