

1

解答解説のページへ

男性  $M_1, \dots, M_4$  の 4 人と女性  $F_1, \dots, F_4$  の 4 人が、横一列に並んだ座席  $S_1, \dots, S_8$  に座る場合を考える。

- (1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。
- (2) (1)の座り方の中で、 $M_1$  の両隣りが  $F_1$  と  $F_2$  になる座り方は何通りあるか。
- (3) (1)の座り方の中で、 $M_1$  と  $F_1$  が隣り合わない座り方は何通りあるか。

2

解答解説のページへ

次の条件で定められる数列  $\{a_n\}$  を考える。

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数  $n$  に対して

$$X \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

が成り立つように、行列  $X$  を定めよ。

(2) 自然数  $n$  に対して  $a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$  の値を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

3

解答解説のページへ

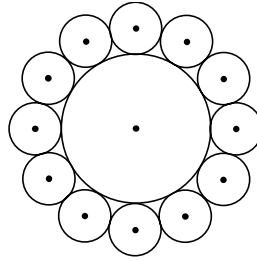
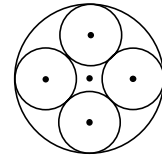
原点を中心とする半径 1 の円を  $C_1$  とし, 原点を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円を  $C_2$  とする。 $C_1$  上に点  $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$  があり, また  $C_2$  上に点  $P_2\left(\frac{1}{2}\cos 3\theta, \frac{1}{2}\sin 3\theta\right)$  がある。ただし,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  であるとする。線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q$  とし, 点  $Q$  の原点からの距離を  $r(\theta)$  とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点  $Q$  の  $x$  座標のとりうる範囲を求めよ。
- (2) 点  $Q$  が  $y$  軸上にあるときの  $\theta$  の値を  $\alpha$  とする。このとき,  $\alpha$  および定積分  $\int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta$  を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上に半径 1 の円  $C$  がある。この円に外接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの  $n$  個の円を図 (例 1) のように配置し、その一つの円の半径を  $R_n$  とする。また、円  $C$  に内接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの  $n$  個の円

例1  $n = 12$  の場合例2  $n = 4$  の場合

を図 (例 2) のように配置し、その一つの円の半径を  $r_n$  とする。ただし、 $n \geq 3$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $R_6, r_6$  を求めよ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (R_n - r_n)$  を求めよ。ただし、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  を用いてよい。